Ciencia y método

Por

Henri Poincaré

Traducción de

Emilio Méndez Pinto

Edición digital para la Biblioteca Digital del ILCE
Título original: *Science and Method*
© De la traducción: Emilio Méndez Pinto

Primera edición: Cosimo, 1914
D. R. © Cosimo, 1914
ISBN: 978-1-60206-448-5

Prohibida su reproducción por cualquier medio mecánico o eléctrico sin la autorización por escrito de los coeditores.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo he recogido varios estudios más o menos relacionados con la metodología científica. El método científico consiste en la observación y el experimento. Si el científico tuviese un tiempo infinito a su disposición, sería suficiente con decirle: “Observa, y observa cuidadosamente”. Pero como carece de tiempo para observar todo, y más que nada para observar cuidadosamente, se ve forzado a seleccionar. La primera cuestión, entonces, es saber cómo hacer esta selección. Esta cuestión concierne tanto al físico como al historiador, y también al matemático, y los principios que guían a todos ellos no suelen ser muy distintos entre sí. El científico se ajusta a ellos de manera instintiva, y al reflexionar sobre tales principios uno puede prever el posible futuro de las matemáticas.

Entenderemos todo esto mejor si observamos al científico trabajar, y para empezar, debemos tener algún conocimiento sobre el mecanismo psicológico del descubrimiento, y especialmente sobre el descubrimiento matemático. La observación del método matemático de trabajar es especialmente instructiva para la psicología.

En todas las ciencias dependientes de la observación debemos tener en cuenta los errores debidos a las imperfecciones de nuestros sentidos y de nuestros instrumentos. Afortunadamente, podemos admitir que, bajo ciertas condiciones, existe una compensación parcial de estos errores, de tal suerte que en los promedios desaparecen. Esta compensación obedece a la casualidad, pero ¿qué es la casualidad? Es una noción difícil de justificar, e incluso de definir, y aún con todo eso, lo que he dicho acerca de los errores de observación muestra que el científico no puede progresar sin ella. Resulta necesario, por tanto, ofrecer una definición tan exacta como sea posible de esta noción, tan indispensable y tan esquiva a la vez.

Estas son generalidades que aplican, usualmente, para todas las ciencias. Por ejemplo, no hay una diferencia apreciable entre el mecanismo del descubrimiento matemático y el mecanismo del descubrimiento en general. Más adelante tocaré cuestiones referidas más particularmente a ciertas ciencias especiales, comenzando con las matemáticas puras. En los capítulos dedicados a éstas, nos veremos obligados a tratar con asuntos algo más abstractos, y para empezar, debemos hablar de la noción del espacio. Todo mundo sabe que el espacio es relativo, o mejor dicho, todo mundo lo dice, pero ¿cuántas personas aún piensan como si lo consideraran absoluto? No obstante

lo anterior, una pequeña reflexión demostrará las contradicciones a las que estas personas están expuestas.

Las cuestiones concernientes a los métodos de instrucción son importantes, primero, por cuenta propia, y segundo, porque uno no puede reflexionar sobre el mejor método para inculcar nuevas nociones en cerebros vírgenes sin, al mismo tiempo, reflexionar sobre la manera en que estas nociones han sido adquiridas por nuestros ancestros, y consecuentemente, sobre su verdadero origen, esto es, en realidad, sobre su verdadera naturaleza. ¿Por qué es que, en la mayoría de los casos, las definiciones que satisfacen a los científicos no significan nada para los niños? ¿Por qué resulta necesario ofrecerles otras definiciones? Esta es la cuestión que me he propuesto resolver en algunos de los capítulos que siguen, y su solución podría sugerir, pienso, reflexiones útiles a los filósofos interesados en la lógica de las ciencias.

Por otra parte, hay muchos geómetras que creen que las matemáticas pueden reducirse a las reglas de la lógica formal, y se han hecho innumerables esfuerzos en esta dirección. Para conseguir su objetivo no han dudado, por ejemplo, en revertir el orden histórico de la génesis de nuestras concepciones, y se han empeñado en explicar lo finito a partir de lo infinito. Pienso que he tenido éxito en demostrar - para todos aquellos que se acercan al problema con una mente abierta - que en todo esto hay una ilusión engañosa. Confío en que el lector comprenda la importancia de esta cuestión, y perdone la aridez de las páginas que me he visto obligado a dedicar a este tema.

Los últimos capítulos, relativos a la mecánica y la astronomía, se encontrarán mucho más fáciles de leer.

La mecánica parece estar a punto de experimentar una revolución total. Las ideas que parecían más firmemente establecidas están siendo destrozadas por osados innovadores, aunque ciertamente sería prematuro posicionarse a su favor desde el principio solamente por el hecho de que sean innovadores; no obstante, es interesante exponer sus puntos de vista, y eso es lo que he intentado hacer. He seguido, en lo posible, un orden histórico, y esto para que las nuevas ideas no parezcan demasiado sorprendentes al no conocer la forma en la que nacieron.

La astronomía nos ofrece magníficos espectáculos, y a su vez hace surgir tremendos problemas. No podemos siquiera soñar con aplicar método experimental alguno en esta ciencia, ya que nuestros laboratorios son muy pequeños. Pero los laboratorios nos permiten hacer analogías con los fenómenos astronómicos y éstas pueden servir como guía al astrónomo. La Vía Láctea, por ejemplo, es una colección de

soles cuyos movimientos podrían parecer, a primera vista, caprichosos. ¿Pero no podría esta colección ser comparada con aquella de las moléculas de gas cuyas propiedades hemos aprendido de la teoría cinética de los gases? Así, el método del físico viene a ayudar indirectamente al astrónomo.

Finalmente, he intentado bosquejar, en unas cuantas líneas, la historia del desarrollo de la geodesia francesa. He mostrado a qué costo, y a partir de qué tipo de esfuerzos e incluso peligros, los geodestas nos han asegurado las pocas nociones que tenemos acerca de la forma de la Tierra. ¿Es esta realmente una cuestión de método? Sí, porque esta historia ciertamente nos enseña qué tipo de precauciones deben circundar cualquier operación científica seria, y cuánto tiempo y apuro están involucrados en la conquista de un único decimal nuevo.

PARTE I

EL CIENTÍFICO Y LA CIENCIA

CAPÍTULO I

LA SELECCIÓN DE HECHOS

Tolstoi explica en algún lugar de sus escritos por qué, en su opinión, “la ciencia por la ciencia misma” es una concepción absurda. No podemos conocer todos los hechos ya que son prácticamente infinitos en número. Debemos, por tanto, hacer una selección, y siendo así lo anterior, ¿puede estar esta selección dirigida por el mero capricho de nuestra curiosidad? ¿No es mejor estar guiados por la utilidad, por nuestras necesidades prácticas y, especialmente, por las morales? ¿No tenemos una ocupación mejor que contar el número de aves que habitan este planeta?

Es claro que para él la palabra *utilidad* no tiene el mismo significado que para los hombres de negocios y, después de ellos, para la mayoría de nuestros contemporáneos. Le importan poco las aplicaciones industriales de la ciencia, las maravillas de la electricidad o del automovilismo, que considera más bien como obstáculos al progreso moral. Para él, lo útil sólo es aquello que es capaz de hacer mejor al hombre.

Apenas es necesario decir que, por mi parte, no puedo estar satisfecho con ninguno de estos ideales. No tengo simpatía alguna ni por una plutocracia codiciosa y estrecha, ni por una democracia virtuosa y carente de aspiraciones, únicamente ocupada en poner la otra mejilla, y en donde encontremos buenas personas vacías de curiosidad quienes, evitando todo tipo de excesos, no se mueran por enfermedad alguna, sino por aburrimiento. Pero todo esto es una cuestión de gustos, y ese no es el punto que deseo discutir.

Sin embargo, la cuestión sigue presente y reclama nuestra atención. Si nuestra selección está únicamente determinada por el capricho o por la necesidad inmediata, no puede haber ciencia por ciencia misma, y consecuentemente no puede haber ciencia alguna. ¿Es esto cierto? No hay disputa en el hecho de que deba hacerse una selección: sin importar qué tan grande sea nuestra actividad, los hechos nos superan, y nunca podemos alcanzarlos. Mientras el científico descubre un hecho, millones y millones se producen en cada milímetro cúbico de su cuerpo. Intentar que la ciencia contenga a la naturaleza es como intentar que la parte contenga al todo.

Pero los científicos creen que existe una jerarquía de hechos, y que entonces puede hacerse una selección juiciosa. Sin duda están en lo correcto, porque de otra forma no habría ciencia, y la ciencia sí existe. Uno sólo tiene que abrir los ojos para observar que los triunfos de la industria, que han enriquecido a tantos hombres prácticos, nunca habrían visto la luz si sólo hubiesen existido estos hombres prácticos, y si no hubiesen sido precedidos por tontos desinteresados que murieron pobres, quienes nunca pensaron en la utilidad, y que aún así tuvieron una guía que no fue precisamente su propio capricho.

Lo que hicieron estos tontos, como lo ha dicho Mach, fue evitar a sus sucesores el problema de pensar. Si hubiesen trabajado solamente con miras a una aplicación inmediata, no habría dejado nada detrás de ellos, y en vista de una nueva necesidad, todo habría tenido que ser hecho de nuevo. Ahora bien, a la mayoría de los hombres no les gusta pensar, y esto quizá es bueno ya que el instinto los guía y muchas veces mucho mejor de lo que podría guiar la razón a una inteligencia pura, por lo menos siempre que persigan un fin inmediato y que siempre sea el mismo. Pero el instinto es rutinario, y si no estuviese fertilizado por el pensamiento, no avanzaría más con el hombre que con la abeja o la hormiga. Es necesario, por lo tanto, pensar por aquellos que no les gusta hacerlo, y como son muchos, cada uno de nuestros pensamientos debe ser útil en tantas circunstancias como sea posible. Por esta razón, mientras más general sea una ley, mayor es su valor.

Esto nos muestra cómo debe hacerse nuestra selección. Los hechos más interesantes son aquellos que pueden usarse varias veces, aquellos que tienen oportunidad de repetirse. Hemos sido lo suficientemente afortunados como para nacer en un mundo en donde existen tales hechos. Supongamos que en lugar de ochenta elementos químicos hubiera ochenta millones, y que no fuesen algunos comunes y otros raros, sino que todos estuviesen distribuidos de manera uniforme. Entonces cada vez

que tomásemos un guijarro habría una gran probabilidad de que estuviese compuesto por alguna sustancia desconocida. Nada de lo que supiéramos sobre otros guijarros nos podría decir algo acerca de él, y ante cada objeto nuevo seríamos como niños pequeños, y como él, sólo podríamos obedecer a nuestros caprichos o a nuestras necesidades. En tal mundo no habría ciencia, y quizá el pensamiento y la vida misma serían imposibles, ya que la evolución nunca hubiese desarrollado los instintos de la propia preservación. Providencialmente esto no es así, y esta bendición, como todas aquellas a las que estamos acostumbrados, no suele ser apreciada en su justo valor. Los biólogos estarían igualmente desconcertados si hubiese sólo individuos y no especies, y si la herencia no hiciese que los niños se parezcan a sus padres.

¿Cuáles son, pues, los hechos que tienen la oportunidad de repetirse? En primer lugar, los hechos simples. Es evidente que en un hecho complejo muchas circunstancias están unidas por casualidad, y que sólo una casualidad aún más improbable podría unirlas así de nuevo. ¿Pero hay tales cosas como los hechos simples? Y si las hay, ¿cómo hemos de reconocerlas? ¿Quién puede decir que lo que creemos como simple no oculta una complejidad alarmante? Todo lo que podemos decir es que debemos preferir hechos que parecen ser simples sobre aquellos en donde nuestra tosca visión detecte elementos disimilares. Sólo hay, entonces, dos alternativas posibles: o bien esta simplicidad es real, o bien los elementos están tan íntimamente mezclados que no admiten ser distinguidos. En el primer caso, tenemos la posibilidad de encontrarnos con el hecho simple de nuevo, ya sea en toda su pureza o como el elemento de un todo más complejo. En el segundo caso la íntima mezcla tiene, similarmente, mayor probabilidad de ser reproducida que lo que tiene una colección heterogénea de serlo. La casualidad puede mezclar, pero no deshacer una mezcla, y una combinación de varios elementos en un edificio bien ordenado en el cual algo pueda ser distinguido, sólo puede hacerse deliberadamente. Hay, por tanto, poca probabilidad de que una colección en donde distintas cosas puedan ser distinguidas se reproduzca. Por otra parte, hay una gran probabilidad de que una mezcla que parezca homogénea a primera vista se reproduzca varias veces. De acuerdo con lo anterior, los hechos que parecen simples, incluso aunque no sean así en realidad, serán más fácilmente producidos de nuevo por la casualidad.

Es esto lo que justifica el método instintivamente adoptado por los científicos, y lo que quizá lo justifica aún mejor es que los hechos que ocurren frecuentemente nos parecen simples sólo porque estamos acostumbrados a ellos.

¿Pero dónde se encuentra el hecho simple? Los científicos han intentado encontrarlo en dos extremos: en lo infinitamente grande y en lo infinitamente pequeño. El astrónomo lo ha encontrado porque las distancias entre las estrellas son inmensas, tan grandes que cada una de ellas [las estrellas] parece sólo como un punto y las diferencias cualitativas desaparecen, y porque un punto es más simple que un cuerpo que tenga forma y cualidades. El físico, por otra parte, ha buscado al fenómeno elemental en una división imaginaria de cuerpos en átomos infinitamente pequeños, porque las condiciones del problema, que experimentan lentas y continuas variaciones a medida que pasamos de un punto del cuerpo a otro, pueden ser consideradas como constantes dentro de cada uno de estos pequeños átomos. De manera similar, el biólogo ha llegado instintivamente a considerar a la célula como más interesante que el animal entero, y los eventos han probado que está en lo correcto, ya que las células que pertenecen a los organismos más diversos tienen más semejanzas entre ellas - para aquellos que pueden reconocerlas - que los organismos por sí mismos. El sociólogo se encuentra en una posición más desconcertante. Los elementos, que para él son los hombres, son muy disimilares, muy variables, muy caprichosos y, en pocas palabras, demasiado complejos por sí mismos. Además, la historia no se repite a sí misma. ¿Cómo es entonces que debe seleccionar al hecho interesante, al hecho que se repite? El método es precisamente la selección de hechos, y de acuerdo con esto, nuestro primer cargo debe ser idear un método. Muchos métodos han sido creados porque ninguno tiene la última palabra, y casi cada tesis sociológica propone un nuevo método que, no obstante, su autor es muy cuidadoso en no aplicar, de tal forma que puede decirse que la sociología es la ciencia con el mayor número de métodos y el menor número de resultados.

Debemos comenzar, por lo tanto, con los hechos regulares; pero tan pronto como se establece la regla, tan pronto como ya no está en duda, los hechos que están en completa conformidad con ella pierden su interés, debido a que ya no pueden enseñarnos nada nuevo. De tal suerte que es la excepción la que se vuelve importante. Dejamos de buscar semejanzas y ponemos nuestra atención, ante todo, en las diferencias, y de éstas seleccionamos primero aquellas que estén más acentuadas, no sólo porque son las más llamativas, sino porque serán las más instructivas. Esto se explicará mejor a partir de un ejemplo sencillo. Supongamos que estamos buscando determinar una curva al observar algunos de los puntos que se encuentran sobre ella. El hombre práctico que buscase sólo la utilidad inmediata únicamente observaría los puntos que requiriese para algún objeto especial. Estos puntos están mal distribuidos

sobre la curva, de tal forma que algunos están hacinados en ciertas partes y son escasos en otras, y resulta imposible conectarlos por una línea continua, a la vez que resultarían inútiles para cualquier otra aplicación. El científico procedería de otra manera. Ya que desea estudiar la curva por sí misma, distribuiría los puntos para ser observados de forma regular, y tan pronto como conoce algunos de ellos, los uniría por una línea regular, y entonces tendría la curva completa. ¿Pero cómo es que consigue esto? Si ha determinado un punto extremo sobre la curva, no permanecerá cerca de este extremo, sino que se moverá al otro extremo. Después de las dos extremidades, el punto central será el más instructivo, y así sucesivamente.

Así, cuando ha sido establecida una regla, debemos primero buscar los casos en donde se presente la mejor oportunidad para que tal regla falle. Esta es una de las muchas razones del interés por los hechos astronómicos y por las eras geológicas. Al hacer grandes excursiones en el espacio o en el tiempo, podemos encontrar completamente alteradas nuestras reglas ordinarias, y estas grandes alteraciones nos darán una visión más clara y una mejor comprensión de tales cambios pequeños de lo que podrían dárnoslas lugares más cercanos a nosotros, de lo que podría dárnoslas el rincón más pequeño de este mundo en el que estamos llamados a vivir y a movernos. Conoceremos mejor este rincón por los viajes que habremos hecho a lugares distantes en donde no tenemos asunto alguno.

Pero a lo que debemos aspirar no es tanto a comprobar semejanzas y diferencias, sino a descubrir similitudes ocultas bajo discrepancias aparentes. Las reglas individuales parecen, al principio, discordantes, pero al observar más cerca podemos, generalmente, detectar una semejanza. Aunque difieran materialmente, se aproximan en la forma y en el orden de sus partes. Cuando las examinamos desde esta perspectiva, las veremos ampliadas y tendientes a abarcarlo todo. Esto es lo que da valor a ciertos hechos que vienen a completar un todo, y muestran que éste es la viva imagen de otros todos conocidos.

No puedo detenerme más en este punto, pero estas pocas palabras resultarán suficientes para demostrar que el científico no hace una selección al azar de los hechos a ser observados. No cuenta el número de aves, como dice Tolstoi, porque el número de estos animales, interesantes como son, esté sujeto a caprichosas variaciones. Más bien intenta condensar una gran cantidad de experiencia y una gran cantidad de pensamiento en un pequeño volumen, y esto es por lo que un pequeño libro de física contiene tantos

experimentos pasados, y mil veces tantos como sea posible, y cuyos resultados son conocidos de antemano.

Pero hasta ahora sólo hemos considerado una parte de la cuestión. El científico no estudia la naturaleza porque resulte útil hacerlo, sino la estudia porque encuentra placer en ello, y encuentra placer en ello porque la naturaleza es bella. Si la naturaleza no fuese bella no valdría la pena conocerla, y tampoco valdría la pena vivir. Por supuesto que no estoy hablando de esa belleza que impresiona a los sentidos, de la belleza de las cualidades y las apariencias. Me encuentro lejos de despreciarla, pero no tiene nada que ver con la ciencia. A la que me refiero es a esa belleza más íntima que surge del armonioso orden de sus partes, y que puede ser comprendida por una inteligencia pura. Esto es lo que da un esqueleto al cuerpo, por decirlo de alguna manera, de las brillantes visiones que adulan nuestros sentidos, y sin este soporte la belleza de estos fugaces sueños sería imperfecta, porque sería indefinida e incluso elusiva. La belleza intelectual, por el contrario, es autosuficiente, y es por ella - quizá más que por el buen futuro de la humanidad - que los científicos se condenan a sí mismos a largas y dolorosas labores.

Es, pues, la búsqueda de esta belleza especial, el sentido de la armonía del mundo, lo que nos hace seleccionar los hechos más adecuados para contribuir a tal armonía, así como el artista selecciona aquellas características de su modelo que completen el retrato y le den carácter y vida. Y no hay miedo alguno de que esta instintiva y no reconocida preocupación desvíe al científico de la búsqueda de la verdad. Podemos soñar con un mundo armonioso, ¡pero qué tan lejos estará del mundo real! Los griegos, los mayores artistas que haya habido jamás, construyeron un cielo para sí mismos, ¡y qué cosa tan pobre es al lado del cielo tal como lo conocemos!

Es porque la simplicidad y la vastedad son bellas que preferimos buscar hechos simples y hechos vastos, que nos deleitamos ahora en seguir los gigantes caminos de las estrellas, ahora en escrutar - con un microscopio - la prodigiosa pequeñez que también resulta vasta, y ahora en buscar - en las eras geológicas - los rastros de un pasado que nos atrae debido a su lejanía.

Ahora vemos que la atención por lo bello nos conduce a la misma selección que la atención por lo útil. De manera similar la economía del pensamiento, aquella economía del esfuerzo que, de acuerdo con Mach, es la tendencia constante en la ciencia, es una fuente de belleza como también una ventaja práctica. Las construcciones que admiramos son aquellas en donde el arquitecto ha conseguido adecuar los medios

con el fin, en donde las columnas parecen llevar las cargas impuestas sobre ellas de manera ligera y sin esfuerzo alguno, como las elegantes cariátides del Erecteión.

¿De dónde surge esta concordancia? ¿Es simplemente que las cosas que nos parecen bellas son aquellas que mejor se adaptan a nuestra inteligencia, y que consecuentemente son, al mismo tiempo, las herramientas que mejor maneja la inteligencia? ¿O se debe más bien a la evolución y a la selección natural? ¿Han exterminado las personas cuyo ideal se conforma mejor con sus propios intereses, propiamente entendidos, a otros y han tomado su lugar? Tanto unos como otros persiguieron su ideal sin considerar las consecuencias, pero mientras que a unos esta persecución los llevó a su destrucción, a otros les permitió construir Imperios. Estamos tentados a creer esto, ya que los griegos triunfaron sobre los bárbaros, y si Europa, heredera del pensamiento griego, domina el mundo, es por el hecho de que los salvajes adoraban los colores llamativos y el estridente ruido de los tambores que apelaban a sus sentidos, mientras que los griegos amaban la belleza intelectual oculta detrás de la belleza sensible, y es esta belleza la que da certeza y fuerza a la inteligencia.

Si duda Tolstoi estaría horrorizado ante tal triunfo, y se resistiría a admitir que podría resultar realmente útil. Pero esta búsqueda desinteresada de la verdad por su propia belleza es también saludable, y puede hacer mejor al hombre. Sé muy bien que hay decepciones, que el pensador no siempre encuentra la serenidad que debe, y que incluso algunos científicos han tenido temperamentos completamente malos.

¿Debemos entonces decir que la ciencia debe abandonarse, y que sólo debe estudiarse la moral? ¿Puede alguien suponer que los moralistas están por encima de todo reproche una vez bajados del púlpito?

CAPÍTULO II

EL FUTURO DE LAS MATEMÁTICAS

Si deseamos prever el futuro de las matemáticas, debemos estudiar la historia y la condición actual de esta ciencia.

Para nosotros los matemáticos, ¿no resulta este procedimiento, hasta cierto punto, profesional? Estamos acostumbrados a la *extrapolación*, cuyo método consiste en deducir el futuro del pasado y del presente, y como somos muy conscientes de sus limitaciones, no corremos riesgo alguno de engañarnos en cuanto al alcance de los resultados que tal método pueda proporcionarnos.

En el pasado ha habido profetas del infortunio, y encontraron placer en repetir que todos los problemas susceptibles a ser resueltos ya habían sido resueltos, y que después de ellos no habría nada sino rebuscos. Afortunadamente, nos puede tranquilizar el ejemplo del pasado. Repetidas veces ha habido hombres que pensaron haber resuelto todos lo problemas, o por lo menos que habían hecho un inventario de todo aquello que admite soluciones. Y desde entonces el significado de la palabra solución se ha extendido: los problemas insolubles se han convertido en los más interesantes de todos, y se han presentado otros problemas con los que ni siquiera se había soñado. Para los griegos una buena solución era aquella que empleara solamente una regla y un compás; después fue una obtenida a partir de la extracción de radicales, y después una en donde sólo figuraran las funciones algebraicas y los radicales.[1] De esta forma, los pesimistas se encontraron continuamente rebasados, continuamente forzados a retraerse, de modo que, en verdad, pienso que hoy en día ya no existen.

Mi intención, por lo tanto, no es refutarlos, ya que están muertos. Sabemos muy bien que las matemáticas continuarán desarrollándose, pero debemos encontrar en qué dirección lo harán. Se me dirá “en todas las direcciones”, y esto es en parte cierto, pero si fuese del todo cierto, sería algo un tanto alarmante. Toda nuestra riqueza pronto sería desconcertante, y su acumulación produciría una masa tan impenetrable como lo fue para el ignorante la incógnita verdad.

[1] Poincaré habla de las distintas formas para resolver ecuaciones de ciertos grados. Nota del Traductor.

Tanto el historiador como el físico deben hacer una selección de hechos. El cerebro del científico, que es únicamente un rincón del Universo, nunca será capaz de contener todo el Universo. De lo anterior se sigue que, de los innumerables hechos ofrecidos por la naturaleza, debemos dejar de lado algunos y retener otros. Lo mismo es cierto, *a fortiori*, en las matemáticas. De manera similar, el matemático no puede retener, a la desbandada, todos los hechos que se le presentan, tanto más cuanto que es él - estaba a punto de decir su propio capricho - el que crea estos hechos. Es él quien reúne los elementos y construye una nueva combinación de arriba abajo, ya que, generalmente, la naturaleza no entrega las cosas confeccionadas.

Sin duda existen casos en donde un matemático ataca un problema para satisfacer algún requerimiento de la ciencia física, y en donde el físico o el ingeniero le piden hacer algún cálculo con miras a alguna aplicación particular. ¿Debemos entonces decir que nosotros, los geómetras, debemos limitarnos a esperar órdenes y que, en lugar de cultivar esta ciencia por nuestro propio placer, debemos no tener más preocupación que la de servir a los gustos de nuestros clientes? Si el único objeto de las matemáticas consiste en ayudar a aquellos que realizan un estudio de la naturaleza, entonces es de ellos de quienes debemos esperar la voz de mando. ¿Es esta la forma correcta de ver el asunto? Ciertamente no, porque si nunca hubiésemos cultivado las ciencias exactas por ellas mismas, nunca hubiésemos creado instrumento matemático alguno, y cuando viniese la voz de mando de los físicos, nos encontraríamos desprovistos de toda arma.

Similarmente, los físicos no esperan a estudiar un fenómeno hasta que alguna necesidad material urgente lo haga una necesidad absoluta, y sin duda están en lo correcto al actuar así. Si los científicos del siglo dieciocho hubiesen desatendido a la electricidad por considerarla simplemente una curiosidad sin interés práctico, no tendríamos, en el siglo veinte, ni telégrafos, ni electroquímica, ni tracción eléctrica. Los físicos forzados a seleccionar no se encuentran, al hacer tal selección, únicamente guiados por la utilidad. ¿Qué método siguen, pues, al hacer una selección entre los distintos hechos naturales? Ya he explicado este en el capítulo precedente. Los hechos que les interesan son aquellos que pueden llevar al descubrimiento de una ley, aquellos que tienen una analogía con muchos otros hechos y que no nos aparecen aislados, sino lo más estrechamente agrupados con otros. El hecho aislado atrae la atención de todos, tanto del lego[2] como del científico, pero lo que el verdadero científico sólo puede ver es

[2] El lego se refiere a aquellas personas que no son especialistas en una materia, o que carecen de los conocimientos y procedimientos técnicos de tal o cual tema. Nota del Traductor.

el enlace que une varios hechos que presentan una profunda aunque oculta analogía. La anécdota de la manzana de Newton probablemente no es cierta[3], pero es simbólica, de tal suerte que la trataremos como si fuese cierta. Pues bien, debemos suponer que antes de Newton muchos hombres habían visto manzanas caer, pero ninguno fue capaz de sacar conclusión alguna de eso. Los hechos serían estériles si no hubiese mentes capaces de seleccionar entre ellos y distinguir aquellos que ocultan algo y reconocer qué es lo que ocultan, mentes que, detrás del hecho desnudo, pueden detectar su alma.

En matemáticas hacemos exactamente lo mismo. De los distintos elementos a nuestra disposición, podemos formar millones de combinaciones diferentes, pero cualesquiera de estas combinaciones, siempre que esté aislada, carece absolutamente de valor. A menudo tales combinaciones conllevan mucho trabajo para su construcción, pero carecen de todo valor a menos que, quizá, puedan suministrar algún tema para un ejercicio en escuelas secundarias. Sería muy distinto si esta combinación tiene lugar en una clase de combinaciones similares cuya analogía hemos reconocido; ya no estaríamos ante la presencia de un hecho, sino de una ley. Y entonces el verdadero descubridor no es el obrero que pacientemente ha construido algunas de estas combinaciones, sino el hombre que ha llevado a cabo su relación. El primero sólo ha visto al mero hecho, el último ha detectado el alma de tal hecho. La invención de una nueva palabra a menudo será suficiente para subrayar la relación, y entonces la palabra será creativa. La historia de la ciencia nos proporciona una serie de ejemplos que a todos nos son familiares.

El célebre filósofo vienés Mach ha dicho que el papel de la ciencia es economizar el pensamiento, tal como una máquina economiza el esfuerzo. Creo que esto es muy cierto. El salvaje calcula con sus dedos o juntando guijarros. Al enseñar a los niños la tabla de multiplicar los salvamos de innumerables operaciones que tendrían que hacer juntando guijarros. Una vez reconocido, ya sea por guijarros o por otra forma, que 6 veces 7 es 42, y registrando en la mente tal resultado, no es necesario repetir la operación. El tiempo empleado en este cálculo no fue en vano, incluso si fue sólo para un regocijo propio. La operación sólo tomó dos minutos, pero hubiese tomados dos millones si un millón de personas tuvieran que repetirla.

Así, la importancia de un hecho se mide por el rendimiento que nos da, esto es, por la cantidad de pensamiento que nos permite economizar.

[3] Al parecer, tal anécdota fue inventada por Voltaire. Nota del Traductor.

En la física, los hechos que dan un gran rendimiento son aquellos que ocupan su lugar en leyes muy generales, porque nos permiten prever un gran número de otros hechos, y sucede exactamente lo mismo en las matemáticas. Supongamos que me dedico a un cálculo muy complicado y que, después de mucho trabajo, llego a un resultado. No habré ganado nada si este resultado no me permitiese prever los resultados de otros cálculos análogos, y dirigirlos con certeza, evitando el ciego tanteo con el que me tuve que contentar la primera vez. Por el contrario, no habré perdido el tiempo si este mismo tanteo me permitiese revelar la profunda analogía que existe entre el problema recién tratado y una clase mucho más extensa de otros problemas, si me mostrase, en seguida, sus semejanzas y sus diferencias, si, en pocas palabras, me permitiese percibir la posibilidad de una generalización. Entonces ya no será simplemente un nuevo resultado que he conseguido, sino una nueva fuerza.

Una fórmula algebraica que nos da la solución para un tipo de problema numérico, si finalmente remplazamos las letras por los números, constituye un ejemplo simple que tiene lugar, en seguida, en la mente de uno. Gracias a esta fórmula, un solo cálculo algebraico nos ahorra la molestia de repetir constantemente cálculos numéricos. Pero este es sólo un tosco ejemplo: todo mundo percibe que hay ciertas analogías que no pueden ser expresadas por una fórmula, y que son las más valiosas.

Si un nuevo resultado debe tener algún valor, debe unir elementos conocidos desde hace tiempo, pero hasta entonces dispersos y aparentemente extraños unos con otros, y de pronto introducir orden donde reinaba la apariencia del desorden. Entonces será posible dilucidar, de un vistazo, cada uno de estos elementos en el lugar que ocupan en el todo. No sólo es el nuevo hecho valioso por cuenta propia, sino que por sí mismo da un valor a los viejos hechos que logra unir. Nuestra mente es tan frágil como nuestros sentidos, y se perdería en la complejidad del mundo si ésta no fuese armoniosa. Tal como el miope, sólo vería los detalles, y estaría obligada a olvidar cada uno de estos detalles antes de examinar al siguiente, porque sería incapaz de considerarlo en el todo. Los únicos hechos dignos de nuestra atención son aquellos que introducen orden en esta complejidad y que de esta forma la hacen accesible para nosotros.

Los matemáticos conceden una gran importancia a la elegancia de sus métodos y de sus resultados, y esto no es simple diletantismo. ¿Qué es lo que nos da la sensación de elegancia en una solución o en una demostración? Es la armonía de las distintas partes, su simetría, y su feliz ajuste; es, en una palabra, todo lo que introduce orden, todo lo que otorga unidad, lo que nos permite obtener una clara comprensión tanto del

todo como de las partes. Pero esto es precisamente lo que causa que nos dé un gran rendimiento y, en realidad, mientras más claro y de un solo vistazo observemos este todo, mejor percibiremos las analogías con otros objetos colindantes y, consecuentemente, tendremos mayor probabilidad de conjeturar las posibles generalizaciones. La elegancia puede resultar del sentimiento de sorpresa causado por la inesperada aparición conjunta de objetos usualmente no asociados. Y en esto, de nuevo, resulta provechosa, porque da a conocer relaciones hasta entonces desconocidas. También es provechosa incluso cuando únicamente resulta del contraste entre la simplicidad de los medios y la complejidad del problema presentado, porque entonces nos hace reflexionar sobre las razones de este contraste, y generalmente nos muestra que esta razón no es casual, sino que debe encontrarse en alguna ley insospechada. Dicho brevemente, el sentimiento de la elegancia matemática no es sino la satisfacción debida a la conformidad entre la solución que deseamos descubrir y las necesidades de nuestra mente, y es a causa de esta misma conformidad que la solución puede resultar en un instrumento para nosotros. Esta satisfacción estética está consecuentemente conectada con la economía del pensamiento, y de nuevo se me ocurre la comparación con el Erecteión, pero no quiero abusar de eso.

Es por la misma razón que, cuando un cálculo más o menos grande nos ha conducido a algún resultado simple a la vez que sorprendente, no nos encontramos satisfechos hasta que hayamos mostrado haber podido prever, si no todo el resultado, por lo menos sí sus rasgos más característicos. ¿Por qué sucede esto? ¿Qué es lo que nos impide estar contentos con un cálculo que aparentemente nos ha enseñado todo lo que queríamos saber? La razón es que, en casos análogos, los grandes cálculos podrían no ser capaces de ser utilizados de nuevo, mientras que esto no resulta cierto para el razonamiento, a menudo semi intuitivo, que nos hubiera permitido prever el resultado. Siendo corto este razonamiento, podemos observar todas las partes de un vistazo, de tal suerte que inmediatamente percibimos qué debe cambiarse para adaptarse a todos los problemas de naturaleza similar que puedan presentarse. Y como nos permite prever si la solución de estos problemas será simple, nos muestra, por lo menos, si vale la pena emprender el cálculo.

Lo que he dicho es suficiente para mostrar qué tan vano sería intentar remplazar la libre iniciativa del matemático por un proceso mecánico de cualquier tipo. Para obtener un resultado que tenga cualquier valor real, no es suficiente con reproducir mecánicamente ciertos cálculos, o con tener una máquina que ponga las cosas en orden:

no es sólo el orden, sino el orden inesperado, lo que tiene valor. Una máquina puede apoderarse del hecho desnudo, pero el alma de éste siempre se le escapará.

Desde mediados del siglo pasado, los matemáticos se han vuelto cada vez más ansiosos por alcanzar una exactitud absoluta. Sin duda tienen toda la razón, y esta tendencia cada vez será más marcada. En matemáticas, la exactitud no lo es todo, pero sin ella no hay nada: una demostración sin exactitud no es nada en absoluto. Esta es una verdad que creo no está en disputa, pero si la tomamos literalmente nos conduce a la conclusión de que antes de 1820, por ejemplo, no había tal cosa como las matemáticas, y esto claramente es una exageración. Los geómetras de aquel día estaban dispuestos a asumir lo que nosotros explicamos a partir de prolijas disertaciones. Esto no significa que ellos no vieran absolutamente nada de esto, sino que lo pasaban un poco por alto y, para poder haberlo visto claramente, hubieran tenido que tomarse la molestia de declarar tal problema.

Sólo que, ¿es necesario declararlo tantas veces? Aquellos que fueron los primeros en prestar una atención especial a la exactitud nos han dado razones que hemos intentado imitar; pero si las demostraciones del futuro han de construirse sobre este modelo, los trabajos matemáticos serán excesivamente largos, y si temo a esta longitud no es sólo por la congestión de las bibliotecas, sino porque, a medida que tales trabajos sean cada vez más grandes, nuestras demostraciones perderán la apariencia de armonía que desempeña, como ya vimos, un papel sumamente útil.

Nos debemos dirigir hacia la economía del pensamiento, y por tanto no es suficiente con dar modelos a ser copiados. Debemos permitir a los que vengan después de nosotros trabajar sin modelos, y no repetir razonamientos previos, sino resumirlos en unas cuantas líneas. Y esto ya se ha hecho con éxito en algunos casos. Por ejemplo, había toda una clase de razonamientos parecidos unos con otros, y que se encontraban por todas partes; eran perfectamente exactos, aunque demasiado largos. Un día alguien pensó en el término “uniformidad de convergencia”, y este término por sí mismo hizo que todos esos razonamientos fueran útiles; ya no era necesario repetirlos, ya que ahora podían asumirse. Así, los que gustan de controversias nos prestan un doble servicio, primero al enseñarnos a hacer las cosas como ellos si es necesario, pero más específicamente al permitirnos, tanto como sea posible, no hacer las cosas como ellos sin sacrificar exactitud alguna.

Un solo ejemplo nos ha mostrado la importancia de los términos en las matemáticas, aunque hay muchos más. Es casi imposible de creer lo que la economía

del pensamiento, tal como Mach decía, puede llevar a cabo gracias a un término bien escogido. Creo haber dicho en algún lado que las matemáticas son el arte de dar el mismo nombre a distintas cosas. Es suficiente con que estas cosas, aunque distintas en materia, sean similares en forma para permitir que su ser, por así decirlo, se maneje en el mismo molde. Cuando el lenguaje ha sido bien escogido, uno puede quedar asombrado al encontrar que todas las demostraciones hechas para un objeto conocido inmediatamente aplican para muchos nuevos objetos: nada requiere ser cambiado, ni siquiera los términos, ya que los nombres se han vuelto los mismos.

Un término bien escogido es a menudo suficiente para eliminar las excepciones permitidas por las reglas establecidas en la fraseología anterior. Esto explica la invención de las cantidades negativas, de las cantidades imaginarias, de los decimales al infinito, y no sé qué tantas cosas más. Y no debemos nunca olvidar que las excepciones son perniciosas, ya que encubren a las leyes.

Esta es una de las características por la cual reconocemos hechos que nos dan una gran ganancia: son los hechos que permiten estas afortunadas innovaciones del lenguaje. El simple hecho, por lo tanto, puede carecer de interés: pudo haber sido notado muchas veces sin prestar servicio alguno a la ciencia, y sólo adquiere un valor cuando algún pensador más cuidadoso percibe la conexión que conlleva, y lo simboliza con un término.

Los físicos proceden justamente así. Han inventado el término “energía”, y éste ha sido enormemente fructífero, ya que también crea una ley al eliminar excepciones, porque da el mismo nombre a cosas que difieren en materia, pero que son similares en forma.

Entre los términos que han ejercido la influencia más afortunada de todas están el de “grupo” y el de “invariable”. Nos han permitido percibir la esencia de muchos razonamientos matemáticos, y nos han mostrado en cuántos casos los antiguos matemáticos trataban con grupos sin saberlo y cómo, creyéndose lejos un razonamiento del otro, de pronto se encontraron juntos sin comprender por qué.

Hoy debemos decir que se estaban examinando grupos isomorfos. Ahora sabemos que, en un grupo, la materia tiene poca importancia, que sólo importa la forma, y que cuando conocemos bien un grupo, conocemos también, por ese simple hecho, todos los grupos isomorfos. Gracias a los términos “grupo” e “isomorfismo”, que resumen esta sutil regla en unas pocas sílabas y en seguida la hacen familiar para todas las mentes, el paso es inmediato y puede hacerse sin dedicar mucho esfuerzo mental. La

idea de grupo está, además, conectada con la de la transformación. ¿Por qué damos tanto valor al descubrimiento de una nueva transformación? Es porque, a partir de un único teorema, nos permite trazar diez o veinte más. Podría decirse que tiene el mismo valor que un cero añadido a la derecha de un número entero.

Esto es lo que ha determinado la dirección del movimiento de la ciencia matemática hasta ahora, y es casi seguro que la determinará en el futuro. Pero la naturaleza de los problemas que se presentan contribuye a esta dirección en el mismo grado. No debemos olvidar cuál debe ser nuestro objetivo, y en mi opinión, éste es doble: nuestra ciencia bordea tanto la filosofía como la física, y es por estos dos vecinos por los que debemos trabajar. Y así siempre hemos visto, y aún veremos, a los matemáticos avanzando en dos direcciones opuestas.

Por un lado, la ciencia matemática debe reflexionar sobre sí misma, y esto resulta útil porque al reflexionar sobre sí misma reflexiona sobre la mente humana que la ha creado; tanto más cuanto que de todas las creaciones mentales, las matemáticas constituyen la que menos ha tomado prestado del exterior. Esta es la razón de la utilidad de ciertas especulaciones matemáticas, tales como las que tienen miras en el estudio de postulados, de las geometrías inusuales, de las funciones con un comportamiento extraño, etc. Mientras más se aparten estas especulaciones de las concepciones más ordinarias y, consecuentemente, de la naturaleza y de las aplicaciones a los problemas naturales, mejor nos mostrarán lo que puede hacer la mente humana si se encuentra alejada de la tiranía del mundo exterior; mejor nos harán conocer, consecuentemente, esta mente por sí misma.

Pero es en la dirección opuesta, en la dirección de la naturaleza, a donde debemos dirigir nuestros esfuerzos.

Ahí nos encontramos con el físico o con el ingeniero, quien dice: “¿Podrías integrar esta ecuación diferencial por mí? La necesito dentro de una semana para la pieza de una construcción que tiene que estar finalizada en cierta fecha”. “Esta ecuación”, responderíamos, “no forma parte de aquellas que pueden integrarse, de las cuales sabes que no existen muchas”. “Sí, lo sé; pero entonces, ¿para qué sirves?” Más a menudo que no, un entendimiento mutuo resulta suficiente. El ingeniero realmente no requiere la integral en términos finitos, sólo requiere conocer el comportamiento general de la función integral, o simplemente quiere una cierta figura que sea fácilmente deducida de esta integral si la conociese. Normalmente no la conocemos, pero

podríamos calcular la figura sin ella, si supiésemos justamente qué figura y qué grado de exactitud requiere el ingeniero.

Formalmente, no se consideraba a una ecuación resuelta hasta la solución fuese expresada por medio de un número finito de funciones conocidas. Pero es casi imposible en el noventa y nueve por ciento de los casos. Lo que siempre podemos hacer, o mejor dicho, lo que siempre debemos intentar hacer, es resolver el problema *cualitativamente*, por así decirlo, esto es, intentar conocer aproximadamente la forma general de la curva que representa la función desconocida.

Entonces queda encontrar la solución *exacta* del problema. Pero si la incógnita no puede ser determinada por un cálculo finito, siempre podemos representarla a partir de una serie infinita convergente que nos permita calcularla. ¿Puede esto considerarse una solución verdadera? La historia dice que Newton una vez hizo conocer a Leibniz un anagrama algo parecido a lo siguiente: *aaaaabbbeeeeii*, etc. Naturalmente, Leibniz no lo comprendió en absoluto, pero nosotros que tenemos la llave sabemos que tal anagrama, traducido a la fraseología moderna, significa: “Sé cómo integrar todas las ecuaciones diferenciales”, y nos vemos tentados a comentar o que Newton era excesivamente afortunado o que tenía ilusiones muy singulares. Lo que quiso decir fue simplemente que podía formar (por medio de coeficientes indeterminados) una serie de potencias satisfaciendo formalmente la ecuación presentada.

Hoy en día una solución similar no nos satisfaría por dos principales razones: porque la convergencia es demasiado lenta, y porque los términos se suceden unos a otros sin obedecer ley alguna. Por otra parte, la serie θ no nos deja nada que desear, primero, porque converge muy rápido (esto es para el hombre práctico que quiere sus números tan rápido como sea posible), y segundo, porque percibimos, de un vistazo, la ley de los términos, que satisface los requerimientos estéticos del teórico.

Ya no hay, por tanto, algunos problemas resueltos y otros no resueltos, sino que sólo hay problemas *más o menos* resueltos, dependiendo de si esto se cumple por una serie de convergencia más o menos rápida o por una ley más o menos armoniosa. No obstante, una solución imperfecta puede llevarnos hacia una mejor.

A veces la serie es de tal convergencia tan lenta que el cálculo es impracticable, y solamente habremos conseguido demostrar la posibilidad del problema. El ingeniero considera que esto es absurdo, y tiene razón, porque no lo ayudará a terminar su construcción dentro del tiempo permitido, y no se preocupa por si será útil para los ingenieros del siglo XXII. Pero nosotros pensamos diferente, y a menudo encontramos

más placer en haber economizado un día de trabajo para nuestros nietos que una hora para nuestros contemporáneos.

A menudo por tantear, por así decirlo, empíricamente, llegamos a una fórmula lo suficientemente convergente. ¿Qué más quieres?, dirá el ingeniero y, a pesar de todo, no estamos satisfechos, porque hubiésemos querido ser capaces de *predecir* la convergencia. ¿Y por qué? Porque si hubiésemos sabido cómo predecirla en un caso, sabríamos cómo predecirla en otro. Hemos tenido éxito, es cierto, pero eso es poco ante nuestros ojos si carecemos de una esperanza real en repetir nuestro éxito.

A medida que la ciencia crece, se vuelve más difícil considerarla en su totalidad. Entonces se hace un intento por cortarla en piezas y satisfacerse con una de estas piezas; en pocas palabras, por especializarse. Un movimiento muy grande en esta dirección constituiría un serio obstáculo al progreso de la ciencia. Como he dicho, es a partir de las inesperadas concurrencias entre sus distintas partes que puede haber un progreso, y demasiada especialización haría imposibles tales concurrencias. Esperemos que los congresos, como los de Heidelberg y Roma, al ponernos en contacto unos con otros, abran una ventana al territorio de nuestros vecinos y nos obliguen a comparar tal territorio con el nuestro, y así escapemos, en cierta medida, de nuestra pequeña aldea. En este sentido, serán el mejor remedio contra el peligro del que he hablado.

Pero me he detenido mucho en las generalidades, y es tiempo de entrar a considerar los detalles.

Echemos un vistazo a las distintas ciencias particulares que vienen a constituir las matemáticas; veamos qué ha hecho cada una de ellas, a qué dirección tiende, y qué podemos esperar de ella. Si las visiones precedentes son correctas, veremos que el gran progreso del pasado ha sido posible cuando dos de estas ciencias se han unido, cuando los hombres fueron conscientes de la similitud de su forma a pesar de la disimilitud de su materia, cuando se han modelado una sobre la otra de tal forma que cada una se beneficia de los triunfos de su compañera. Al mismo tiempo, debemos fijarnos en las concurrencias de naturaleza similar para el progreso futuro.

ARITMÉTICA

El progreso de la aritmética ha sido mucho más lento que el del álgebra y el análisis, y es fácil entender la razón. La sensación de continuidad es una preciosa guía de la que carece el aritmético. Cada número entero está separado del resto y tiene, por decirlo de

alguna manera, su propia individualidad; cada uno de ellos es una especie de excepción, y esa es la razón por la cual los teoremas generales siempre serán menos comunes en la teoría de números, y también la razón por la cual aquellos que existen estarán siempre más ocultos y escaparán a la detección.

Si la aritmética está retrasada en comparación con el álgebra y el análisis, lo mejor que puede hacer es intentar modelarse a partir de estas ciencias para poder beneficiarse de su avance. El aritmético debe guiarse, pues, por las analogías con el álgebra. Estas analogías son numerosas, y si en muchos casos no han sido lo suficientemente estudiadas como para ser servibles, sí han sido por lo menos prefiguradas, y el propio lenguaje de estas dos ciencias muestra que éstas han sido percibidas. Así, hablamos de números trascendentales, y tomamos consciencia del hecho de que la futura clasificación de estos números ya tiene un modelo en la clasificación de las funciones trascendentales. Sin embargo, no está muy claro cómo es que debemos pasar de una clasificación a otra; pero si fuese claro ya se hubiese hecho, y ya no sería el trabajo del futuro.

El primer ejemplo que viene a mi mente es la teoría de los congruentes, en la que encontramos un paralelismo perfecto con la teoría de las ecuaciones algebraicas. Sin duda conseguiremos completar este paralelismo, que debe existir, por ejemplo, entre la teoría de las curvas algebraicas y la de los congruentes con dos variables. Cuando los problemas relativos a los congruentes con varias variables hayan sido resueltos, habremos dado el primero paso hacia la solución de muchas cuestiones concernientes al análisis indeterminado.

ÁLGEBRA

La teoría de las ecuaciones algebraicas continuará atrayendo la atención de los geómetras, al ser tan numerosos y distintos los lados por los cuales se puede abordar tal teoría.

No debe suponerse que el álgebra está completa porque provee reglas para formar todas las combinaciones posibles; aún queda encontrar muchas combinaciones interesantes, como aquellas que satisfacen tales o cuales condiciones. De esta forma, se construirá una especie de análisis indeterminado, en donde las cantidades desconocidas ya no serán números enteros sino polinomios. De tal suerte que ahora será el álgebra el que se modelará sobre la aritmética, guiado por la analogía del número entero, ya sea

con el polinomio entero con coeficientes indefinidos, o con el polinomio entero con coeficientes enteros.

GEOMETRÍA

Parecería que la geometría no puede contener nada que no esté ya contenido en el álgebra o el análisis, y que los hechos geométricos no son sino los hechos del álgebra o el análisis expresados en otro lenguaje. Podría suponerse, entonces, que después de la revisión recién hecha, no habría nada que decir sobre esta ciencia. Pero esto implicaría no reconocer la gran importancia que tiene un lenguaje bien formado, o no comprender lo que se añade a las cosas por el método de expresar, y consecuentemente de agrupar, tales cosas.

Para empezar, las consideraciones geométricas nos llevan a plantearnos nuevos problemas. Estos últimos son ciertamente, si se quiere, problemas analíticos, pero son problemas que nunca nos hubiésemos planteado con motivo del análisis, y éste, no obstante, se beneficia de ellos, tal como se beneficia de aquellos que se ve obligado a resolver para satisfacer los requerimientos de la física.

Una gran ventaja de la geometría yace precisamente en el hecho de que los sentidos pueden asistir al intelecto, y ayudarlo a determinar el camino a seguir; es así como muchas mentes prefieren reducir los problemas del análisis a la forma geométrica. Desafortunadamente, los sentidos no pueden llevarnos muy lejos, y nos dejan estancados tan pronto como deseamos salir de las tres dimensiones clásicas. ¿Significa esto que cuando hemos dejado este dominio restringido, en el que parece que los sentidos nos quieren hacer prisioneros, ya no debemos contar con nada excepto con el análisis, y que toda geometría de más de tres dimensiones es vana y carece de objeto alguno? En la generación que nos precede, los más grandes maestros hubieran respondido que sí. Hoy en día estamos tan familiarizados con esta noción que incluso podemos hablar de ella en un curso universitario sin causar mucho estupor.

¿Pero qué uso puede tener? Esto no es difícil de ver. En primer lugar, nos provee de un lenguaje muy conveniente que expresa, en términos muy concisos, lo que el lenguaje ordinario del análisis expresaría en frases tediosamente largas. Más que lo anterior, este lenguaje nos permite dar el mismo nombre a cosas que guardan un parecido entre sí, y expone analogías difíciles de olvidar. Nos permite, pues, encontrar nuestro camino en aquel espacio que parece ser demasiado grande para nosotros al

convocar continuamente en nuestra mente al espacio visible, sin duda sólo una imagen imperfecta de aquél, pero aun así una imagen. Otra vez aquí, como en los ejemplos precedentes, es la analogía con lo que es simple lo que nos permite comprender aquellos que es complejo.

Esta geometría de más de tres dimensiones no es una simple geometría analítica, y tampoco es puramente cuantitativa, sino también cualitativa, y es principalmente sobre esta base que se vuelve interesante. Hay una ciencia llamada *geometría de posición* que tiene por objeto el estudio de las relaciones de posición de los distintos elementos de una figura, después de haber eliminado sus magnitudes. Esta geometría es puramente cualitativa, y sus teoremas seguirían siendo ciertos si las figuras, en lugar de ser exactas, fuesen trazadas por un niño. También es posible construir una geometría de posición de más de tres dimensiones. La importancia de esta geometría es inmensa, y no puedo insistir demasiado en ello. Lo que Riemann - uno de sus principales creadores - ha ganado de ella resulta suficiente para demostrar lo anterior. Debemos conseguir construirla completamente en los espacios superiores, y entonces tendremos un instrumento que realmente nos permitirá ver el hiperespacio y complementar nuestros sentidos.

Los problemas de la geometría de posición quizá no se habrían presentado si únicamente hubiese sido usado el lenguaje del análisis. O quizá me equivoque, porque ciertamente se hubieran presentado, al ser su solución necesaria para una multitud de cuestiones relativas al análisis, aunque se hubiesen mostrado aislados, uno después de otro, y sin ser nosotros capaces de percibir su vínculo común.

CANTORISMO

He hablado antes de la necesidad que tenemos de volver continuamente a los primeros principios de nuestra ciencia, y de la ventaja de este proceso para el estudio de la mente humana. Es esta necesidad la que ha inspirado dos esfuerzos que han ocupado un gran lugar en la historia más reciente de las matemáticas. El primero es el cantorismo, y los servicios que ha prestado a la ciencia son bien conocidos. Cantor introdujo en la ciencia un nuevo método para considerar el infinito matemático, y tendré ocasión de hablar de nuevo de él en la segunda parte del tercer capítulo. Uno de los rasgos característicos del cantorismo es que, en lugar de llegar a lo general erigiendo construcciones cada vez más complejas, y definiendo a partir de la construcción, comienza con el *genus supremum* y

solamente define, como decían los escolásticos, *per genus proximum et differentiam specificam*. De ahí el horror que ha producido en ciertas mentes, tal como la de Hermite, cuya idea favorita consistía en comparar lo matemático con las ciencias naturales. Para la mayoría de nosotros estos prejuicios se han disipado, pero ha resultado que nos hemos encontrado con ciertas paradojas y aparentes contradicciones, que sin duda hubiesen regocijado el corazón de Zenón de Elea y a la escuela de Megara. Entonces toca buscar un remedio, y cada hombre por su propio camino. Por mi parte pienso, y no soy el único que así lo hace, que lo importante es nunca introducir cualesquiera entidades, sino sólo aquellas que puedan ser completamente definidas en un número finito de palabras. Sea cual sea el remedio adoptado, podemos prometernos la alegría que experimenta un doctor al intentar remediar un sutil caso patológico.

LA BÚSQUEDA DE POSTULADOS

Se han hecho varios intentos, desde otro punto de vista, para enumerar los axiomas y postulados más o menos ocultos que conforman las bases de las distintas teorías matemáticas, y en esta dirección el señor Hilbert ha obtenido los resultados más brillantes. Al principio parece que este dominio debe estar estrictamente limitado, y que ya no habrá más que hacer cuando haya sido completado el inventario, cosa que no puede tomar mucho tiempo. Pero cuando todo haya sido enumerado, habrá muchas formas de clasificarlo. Un buen bibliotecario siempre encuentra trabajo que hacer, y cada nueva clasificación resultará instructiva para el filósofo.

Concluyo aquí esta revisión, que no puedo siquiera soñar con hacerla completa. Pienso que estos ejemplos han sido suficientes para mostrar el mecanismo por el cual las ciencias matemáticas han progresado en el pasado, y la dirección en la que deben avanzar en el futuro.

CAPÍTULO III

DESCUBRIMIENTO MATEMÁTICO

La génesis del descubrimiento matemático es un problema que debe inspirar a los psicólogos con el más vivo interés, porque este es el proceso por el cual la mente humana parece tomar menos prestado del mundo exterior, y en donde actúa, o por lo menos así lo parece, sólo por sí misma y sobre sí misma, de tal suerte que al estudiar el proceso del pensamiento geométrico podríamos esperar llegar a lo que resulta más esencial en la mente humana.

Esto ha sido entendido desde hace tiempo, y hace pocos meses una revista llamada *L'Enseignement mathématique*, editada por los señores Laisant y Fehr, hizo una investigación sobre los hábitos de la mente y los métodos de trabajo de distintos matemáticos. He esbozado las principales características de este artículo cuando los resultados de la investigación fueron publicados, de tal suerte que apenas he sido capaz de hacer uso de ellos, y me contentaré con decir que la mayoría de la evidencia presentada confirma mis conclusiones. No digo que haya unanimidad, por la simple razón de que al apelar al sufragio universal no podemos esperar obtenerla.

Un primer hecho debe sorprendernos, o mejor dicho debería sorprendernos si no estuviésemos acostumbrados a él. ¿Cómo es que hay personas que no comprenden las matemáticas? Si esta ciencia sólo recurre a las reglas de la lógica - aquellas aceptadas por toda mente bien formada -, si su evidencia está fundada sobre principios comunes a todos los hombres, y que nadie excepto un loco se atrevería a negar, ¿cómo es que hay tantas personas completamente impermeables a ella?

No hay nada misterioso en el hecho de que no todo mundo es capaz de descubrir. Que una persona sea incapaz de retener una demostración que alguna vez ha aprendido es todavía comprensible. Pero lo que parece más sorprendente, cuando lo consideramos, es que alguien sea incapaz de comprender un argumento matemático en el momento mismo en el que se le muestra. Y, sin embargo, aquellos que sólo pueden seguir el argumento con dificultad son mayoría; esto es incontestable, y la experiencia de los maestros de educación secundaria ciertamente no me va a contradecir.

Y aún más, ¿cómo es posible el error en las matemáticas? Un intelecto sano no debería cometer ningún error lógico, y sin embargo hay mentes muy agudas que no

darán un paso en falso en un argumento pequeño tal como los que debemos hacer en las acciones ordinarias de la vida, pero que son incapaces de seguir o repetir, sin error, las demostraciones matemáticas que sin duda son más largas, pero que son, después de todo, solamente acumulaciones de pequeños argumentos exactamente análogos a aquellos que en principio resultan tan fáciles. ¿Es necesario añadir que los mismos matemáticos no son infalibles?

La respuesta me parece bastante obvia. Imaginemos una larga serie de silogismos en donde las conclusiones de aquellos que preceden forman las premisas de aquellos que les siguen. Deberíamos ser capaces de comprender cada uno de los silogismos, y no es en el paso de las premisas a la conclusión en donde estamos en peligro de ir por mal camino, sino entre el momento en que nos encontramos por primera vez con una proposición como la conclusión de un silogismo, y el momento en que la encontramos una vez más como la premisa de otro silogismo, porque quizá habrá transcurrido mucho tiempo y habremos roto muchos eslabones de la cadena. De acuerdo con lo anterior, bien puede suceder que hayamos olvidado tal silogismo o, lo que es peor, olvidado su significado, de tal forma que podemos intentar remplazarlo por una proposición algo disímil, o preservar la misma declaración pero otorgándole un significado ligeramente distinto, y es así como estamos en peligro de caer en un error.

Un matemático debe a menudo usar una regla y, naturalmente, comienza por demostrarla. En el momento en que la demostración está fresca en su memoria, comprende perfectamente su sentido y su significado, y no está en peligro de cambiarla. Pero más tarde se encomienda a la memoria, sólo aplica tal demostración mecánicamente, y entonces, si su memoria falla, puede cometer un error. Es así como, tomando un simple y casi vulgar ejemplo, a veces cometemos errores en el cálculo porque hemos olvidado la tabla de multiplicar.

Según esta visión, las aptitudes especiales de los matemáticos se deberían a una memoria muy certera o a una tremenda capacidad de atención, y sería una cualidad análoga a la del jugador de whist que puede recordar las cartas jugadas, o, subiendo un escalón más, a la del jugador de ajedrez que es capaz de imaginar un gran número de combinaciones y de retenerlas en su memoria. Todo buen matemático debe ser también un buen jugador de ajedrez y *viceversa*, y similarmente también debe ser un buen calculador. Ciertamente esto sucede a veces, y así Gauss era, al mismo tiempo, un geómetra genial y un calculador muy precoz y certero.

Pero hay excepciones, o quizá me equivoque, porque no puedo llamarlas excepciones si éstas son más numerosas que los casos que confirman la regla. Más bien, fue Gauss la excepción. En cuanto a mí, debo confesar que soy absolutamente incapaz de hacer una suma sin cometer un error. De manera similar, debo ser un pésimo jugador de ajedrez. Fácilmente puedo calcular que, al jugar de cierta manera, estaré expuesto a tales o cuales peligros; entonces reviso mis otros movimientos, que habré rechazado por otras razones, y termino haciendo el primer movimiento examinado, olvidando en el intervalo los peligros que había previsto originalmente.

En pocas palabras, mi memoria no es mala, pero es insuficiente para hacerme un buen jugador de ajedrez. ¿Por qué entonces no me falla al momento de seguir un difícil argumento matemático en donde la mayoría de los jugadores de ajedrez se perderían? Claramente porque mi memoria está guiada por la tendencia general del argumento. Una demostración matemática no es una simple yuxtaposición de silogismos, sino que consiste, más bien, en silogismos *puestos en un cierto orden*, y el orden en el que están puestos estos elementos es mucho más importante que los elementos mismos. Si tengo la sensación, la intuición, por decirlo de alguna manera, de este orden, de tal suerte que puedo percibir la totalidad del argumento de un vistazo, ya no es necesario temer olvidar uno de los elementos, porque cada uno de ellos estará puesto de manera natural en la proposición preparada para él, sin que se tenga que hacer esfuerzo de memoria alguno.

Me parece entonces que, mientras repito un argumento que he aprendido, lo habría podido descubrir. Esto es a menudo sólo una ilusión, pero incluso entonces, aun cuando no sea lo suficientemente ingenioso como para crear algo por mí mismo, lo redescubro a medida que lo repito.

Podemos entender que esta sensación, esta intuición del orden matemático que nos permite conjeturar armonías ocultas y relaciones, no puede pertenecer a todo mundo. Algunos no tienen esta delicada sensación tan difícil de definir, ni tampoco una memoria y una atención fuera de lo común, de tal forma que son absolutamente incapaces de comprender incluso los primeros pasos de las matemáticas superiores. Y esto aplica para la mayoría de las personas. Otros poseen la sensación sólo en un grado menor, pero están bendecidos con una memoria fuera de lo común y con una gran capacidad de atención. Estos últimos aprenden los detalles uno después de otro de memoria, pueden comprender las matemáticas e incluso aplicarlas, pero no están en condición de crear. Los otros, por otra parte, poseen la intuición especial de la que he

hablado más o menos desarrollada, y no sólo pueden comprender las matemáticas - incluso cuando su memoria no sea tan extraordinaria - sino que también pueden ser creadores, e intentar hacer un descubrimiento con una mayor o menor probabilidad de éxito, de acuerdo con el desarrollo de esta intuición.

¿Qué es, en realidad, el descubrimiento matemático? No consiste en hacer nuevas combinaciones con entidades matemáticas ya conocidas. Eso puede hacerlo cualquiera, y las combinaciones que así surgen pueden ser infinitas en número, además de que la mayor parte de ellas estarían desprovistas de todo interés. El descubrimiento consiste precisamente en no construir combinaciones inútiles, sino en construir aquellas que resulten útiles, y que son una minoría infinitamente pequeña. El descubrimiento es, pues, discernimiento, selección.

He explicado antes cómo debe hacerse esta selección. Los hechos matemáticos dignos de ser estudiados son aquellos que, dada su analogía con otros hechos, son capaces de conducirnos hacia el conocimiento de una ley matemática, en la misma forma que los hechos experimentales nos conducen al conocimiento de una ley física. Son aquellos que nos revelan relaciones insospechadas entre otros hechos, desde hace tiempo conocidos, pero erróneamente creídos como inconexos entre sí.

Entre las combinaciones que elegimos, las más fructíferas son comúnmente aquellas formadas por elementos traídos de dominios ampliamente separados. No estoy diciendo que para el descubrimiento sea suficiente con traer objetos tan incongruentes como sea posible, ya que la mayor parte de las combinaciones así formadas sería completamente infructífera, no obstante que algunas entre ellas, aunque sean muy raros los casos, son las más fructíferas de todas.

El descubrimiento, como he dicho, es selección. Pero quizá esta no es la palabra correcta, porque sugiere la idea de un comprador al que se le ha mostrado un gran número de muestras, y examina una después de otra para hacer su selección. En nuestro caso, las muestras serían tan numerosas que una vida entera no alcanzaría para examinarlas. Las cosas no suceden así. Las combinaciones infructíferas no se presentan tanto en la mente del descubridor. En la esfera de su consciencia nunca aparecen sino combinaciones realmente útiles, y algunas que rechaza que, no obstante, participan en cierta medida del carácter de las combinaciones útiles. Todo sucede como si el descubridor fuese un examinador secundario que sólo tiene que interrogar candidatos declarados elegibles después de pasar una prueba preliminar.

Pero lo que he dicho hasta ahora es únicamente lo que puede observarse o inferirse al leer los trabajos de los geómetras, siempre que sean leídos con cierto grado de reflexión.

Es tiempo de ahondar más, y de ver qué sucede en el alma misma del matemático. Para este propósito pienso que no puedo hacer mejor cosa que referir mis recuerdos personales. Solamente voy a confinarme a relatar cómo es que escribí mi primer tratado sobre funciones fuchsianas.[4] Debo disculparme de antemano porque voy a introducir algunas expresiones técnicas que, no obstante, no deben alarmar al lector porque no tiene necesidad de comprenderlas. Debo decir, por ejemplo, que encontré la demostración de tal y cual teorema bajo tal y cual circunstancia; el teorema podrá tener un nombre bárbaro que muchos no conocerán, pero esto carece de importancia. Lo que es interesante para la psicología no es el teorema sino las circunstancias.

Por un periodo de quince días estuve intentando probar que no podía haber una función análoga a lo que desde entonces he llamado funciones fuchsianas. En ese tiempo era muy ignorante, y cada día me sentaba enfrente de mi mesa y gastaba una hora o dos de mi tiempo intentando con un gran número de combinaciones, pero nunca llegué a ningún resultado. Una noche tomé un poco de café oscuro, cosa contraria a mi costumbre, y fui incapaz de conciliar el sueño. Una multitud de ideas continuaban surgiendo en mi cabeza, tanto así que casi podía sentirlas empujándose unas a otras, hasta que dos de ellas se unieron, por así decirlo, para formar una combinación estable. A la mañana siguiente, había logrado establecer la existencia de una clase de funciones fuchsianas, a saber, aquellas derivadas de las series hipergeométricas. Únicamente tenía que verificar los resultados, lo que tomó un par de horas.

Entonces quise representar estas funciones por el cociente de dos series. Esta idea era perfectamente consciente y deliberada, ya que se encontraba guiada por la analogía con las funciones elípticas. Me preguntaba cuáles deberían ser las propiedades de estas series, si existían, y conseguí sin mucha dificultad formar la serie que he llamado Theta-Fuschsiana.

En este momento dejé Caen, donde vivía en ese entonces, para tomar parte en una conferencia geológica organizada por la Escuela de Minas. Los incidentes del viaje me hicieron olvidar mi trabajo matemático. Cuando llegamos a Coutances, tomamos un descanso para ir a dar una vuelta y, tan pronto como di el primer paso, me vino la idea -

[4] Estas funciones toman su nombre del matemático alemán Lazarus Fuchs. Nota del Traductor.

aunque nada en mis pensamientos anteriores me había preparado para ella - de que las transformaciones que había utilizado para definir las funciones fuchsianas eran idénticas a las de la geometría no euclidiana. No hice verificación alguna, y no tenía tiempo para hacerlo, ya que retomé de nuevo la conversación tan pronto como me senté en el descanso, pero sentí una certeza absoluta a la vez. Cuando regresé a Caen, verifiqué el resultado en mi tiempo libre para satisfacer mi consciencia.

Entonces empecé a estudiar cuestiones aritméticas sin conseguir un gran resultado aparente, y sin sospechar que pudieran tener la menor conexión con mis estudios previos. Disgustado por mi falta de éxito, me retiré para pasar unos días en la playa, y para pensar en cosas distintas. Un día, mientras caminaba sobre el acantilado, vino la idea a mí - de nuevo con las mismas características de concisión, brusquedad, y certeza inmediata - de que las transformaciones aritméticas de formas cuadráticas ternarias indefinidas son idénticas que las de la geometría no euclidiana.

Regresando a Caen, reflexioné sobre este resultado y deduje sus consecuencias. El ejemplo de las formas cuadráticas me mostró que hay otros grupos fuchsianos además de aquellos que corresponden a las series hipergeométricas; observé que podía aplicar a ellos la teoría de la serie de Theta-Fuchsiana y que, consecuentemente, hay otras funciones fuchsianas además de aquellas que se derivan de las series hipergeométricas, las únicas que conocía en ese entonces. Naturalmente, me propuse formar todas estas funciones. Les puse sistemáticamente un cerco y capturé todos los accesorios uno por uno. Había uno, sin embargo, que todavía se mantenía fuera, y cuya caída llevaría consigo la de la fortaleza principal. Pero todos mis esfuerzos no sirvieron, en un principio, de nada, excepto para hacerme comprender mejor la dificultad de todo esto, que ya era algo. Todo este trabajo era perfectamente consciente.

Luego partí hacia Mont-Valérien, donde tenía que servir mi tiempo en el ejército, y entonces mi mente estuvo ocupada en cosas muy distintas. Un día, mientras cruzaba la calle, la solución de la dificultad que me había llevado a estar paralizado me vino de golpe. No intenté desentrañarla inmediatamente, y fue sólo después de mi servicio terminó que regresé a la cuestión. Tenía todos los elementos, y solamente necesitaba ensamblarlos y organizarlos. Como corresponde, compuse mi tratado definitivo de una sentada y sin mucha dificultad.

Es inútil multiplicar los ejemplos, y me contento con este. En cuanto a mis otras investigaciones, las cuentas que daría serían muy similares, y las observaciones

relatadas por otros matemáticos en la investigación de *L'Enseignement mathématique* solamente las confirmarían.

Uno se encuentra a la vez sorprendido por estas apariciones de iluminación repentina, que no son más que obvias indicaciones del largo transcurso de un trabajo inconsciente previo. La parte desempeñada por este trabajo inconsciente en el descubrimiento matemático me parece indisputable, y encontramos rastros de él en otros casos menos evidentes. A menudo, cuando un hombre está trabajando en una cuestión difícil, no consigue nada la primera vez que se pone a trabajar. Después toma una especie de descanso, y se pone de nuevo delante de su mesa. Durante la primera media hora aún no encuentra nada, y después, de repente, la idea decisiva se presenta en su mente. Podríamos decir que el trabajo consciente probó ser más fructífero porque fue interrumpido y el descanso reestableció la fuerza y refrescó la mente. Pero es más probable que el descanso haya sido ocupado por un trabajo inconsciente, y que el resultado de este trabajo fue revelado más tarde al geómetra exactamente como en los casos que he citado, excepto que la revelación, en lugar de surgir durante una caminata o un viaje, vino durante un periodo de trabajo consciente, pero independiente de tal trabajo, que a lo mucho sólo realiza el proceso de desbloqueo, como si fuese el estímulo que despertó en forma consciente los resultados ya adquiridos durante el descanso, y que hasta entonces permanecían inconscientes.

Tengo otra observación que hacer con respecto a las condiciones de este trabajo inconsciente, a saber, que éste no es posible, o por lo menos no es fructífero, a menos que esté primero precedido y después seguido por un periodo de trabajo consciente. Estas repentinas inspiraciones nunca se producen (y esto ya está lo suficientemente probado por los ejemplos que he dado) excepto después de algunos días de esfuerzos voluntarios que parecen ser absolutamente infructíferos, en los que se piensa no haber conseguido nada, y en donde parece estarse en un camino totalmente equivocado. Estos esfuerzos, sin embargo, no eran tan estériles como uno pensaba, ya que pusieron en movimiento a la máquina consciente, y sin ellos no hubiera trabajado sobre nada en absoluto, y por tanto no hubiese producido nada.

La necesidad del segundo periodo de trabajo consciente puede ser comprendida más fácilmente. Es necesario trabajar los resultados de la inspiración, deducir las consecuencias inmediatas, ponerlas en orden, y exponer las demostraciones; pero, sobre todo, es necesario verificarlas. He hablado de la sensación de certeza absoluta que acompaña a la inspiración; en los casos descritos, esta sensación no es engañosa, y este

casi siempre será el caso. Pero debemos tener cuidado de pensar que esta es una regla sin excepciones. A menudo la sensación nos engaña sin ser menos distinta por ese motivo, y solamente detectamos tal engaño cuando intentamos establecer las demostraciones. He observado este hecho más notablemente con respecto a ideas que han llegado a mí en la mañana o en la noche cuando estoy en la cama en un estado semi-somnoliento.

Tales son los hechos del caso, y sugieren las siguientes reflexiones. El resultado de todo lo que precede es demostrar que el ego inconsciente, o como es llamado, el ego subliminal, desempeña un papel sumamente importante en el descubrimiento matemático. Pero el ego subliminal es generalmente pensado como puramente automático. Ahora hemos visto que el trabajo matemático no es un simple trabajo mecánico, y que no podría ser confiado a una máquina, sin importar el grado de perfección que supongamos haberle dado. No es sólo cuestión de aplicar ciertas reglas, de fabricar tantas combinaciones como sea posible de acuerdo con ciertas leyes fijas. Las combinaciones así obtenidas serían extremadamente numerosas, inútiles, y estorbosas. El verdadero trabajo del descubridor consiste en escoger entre estas combinaciones con miras a eliminar aquellas que resulten inútiles, o en otro caso a no molestarse en escoger en absoluto. Las reglas que deben guiar esta elección son extremadamente sutiles y delicadas, y es prácticamente imposible establecerlas en un lenguaje preciso; deben ser sentidas y no tanto formuladas. Bajo estas condiciones, ¿cómo podemos imaginar a un tamiz capaz de aplicarlas mecánicamente?

Lo siguiente se presenta, pues, como una primera hipótesis. El ego subliminal no es de ninguna manera inferior al ego consciente; no es puramente automático; es capaz de discernir; tiene tacto y ligereza de tacto; puede seleccionar y puede adivinar. Más que eso, puede adivinar mejor que el ego consciente, ya que tiene éxito ahí donde el último falla. En pocas palabras, ¿no es el ego subliminal superior al ego consciente? La importancia de esta cuestión será fácilmente comprendida. En una conferencia reciente, el señor Boutroux mostró cómo este ego ha surgido en ocasiones completamente distintas, y que consecuencias traería responder afirmativamente a la pregunta hecha anteriormente. (Véase también, del mismo autor, *Science et religion*, pp. 313 *et seq.*).

¿Estamos forzados a dar una respuesta afirmativa a esto dados los hechos que he expuesto? Confieso que, por mi parte, me encuentro poco dispuesto a aceptarlo. Regresemos, pues, a los hechos, y veamos si no admiten otras explicaciones.

Es cierto que las combinaciones que se presentan en la mente - en una especie de iluminación súbita después de un periodo un tanto largo de trabajo inconsciente - resultan ser, generalmente, útiles y fructíferas, y que parecen ser el resultado de un examen preliminar. ¿Se sigue de esto que el ego subliminal, habiendo adivinado a partir de una delicada intuición que estas combinaciones podrían ser útiles, no ha formado combinación algunas excepto éstas, o que ha formado un gran número de otras combinaciones que, debido a su carencia de interés, permanecieron inconscientes?

Bajo este segundo aspecto, todas las combinaciones se forman como resultado de la acción automática del ego subliminal, pero sólo aquellas que resultan interesantes encuentran su camino en el campo de la consciencia. Esto también es sumamente misterioso. ¿Cómo podemos explicar el hecho de que, de los miles de productos de nuestra actividad inconsciente, algunos puedan cruzar cierto umbral y otros se queden fuera? ¿Es la mera casualidad la que les da este privilegio? Evidentemente no. Por ejemplo, de todas las agitaciones de nuestros sentidos, sólo las más intensas retienen nuestra atención, a menos que ésta se haya dirigido a ellas por otras causas. Más comúnmente son los fenómenos inconscientes privilegiados, aquellos capaces de volverse conscientes, los que - directa o indirectamente - más afectan nuestra sensibilidad.

Podría parecer sorprendente que la sensibilidad sea insinuada en conexión con las demostraciones matemáticas que, al parecer, solamente interesan al intelecto. Pero no si tenemos en cuenta la sensación de la belleza matemática, la armonía de los números y las formas, y la elegancia geométrica. Este es un sentimiento estético real que todos los verdaderos matemáticos reconocen, y esto es verdaderamente sensibilidad.

Ahora bien, ¿cuáles son las entidades matemáticas a las que atribuimos este carácter de belleza y elegancia, y que son capaces de desarrollar en nosotros una especie de emoción estética? Aquellas cuyos elementos están armoniosamente ordenados, de tal suerte que la mente pueda, sin mucho esfuerzo, tomar el todo sin desatender los detalles. Esta armonía es, en seguida, una satisfacción a nuestras exigencias estéticas, y un auxilio a la mente que respalda y guía. Al mismo tiempo, al poner ante nuestros ojos un todo bien ordenado, nos da el presentimiento de una ley matemática. Ahora, como he dicho antes, los únicos hechos matemáticos dignos de atraer nuestra atención y capaces de ser útiles son aquellos que pueden hacernos conocer una ley matemática. De acuerdo con lo anterior, llegamos a la siguiente conclusión. Las combinaciones útiles son precisamente las más bellas, quiero decir las que más atraen la atención de aquella

sensibilidad especial que todos los matemáticos conocen, pero que es tan ignorada por los hombres legos que a menudo sólo pueden sonreír ante ella.

¿Qué sigue, entonces? Del gran número de combinaciones que ciegamente forma el ego subliminal, casi todas carecen de interés y de utilidad. Pero precisamente por esto no ejercen acción alguna sobre la sensibilidad estética, y entonces la consciencia nunca llega a conocerlas. Sólo unas pocas son armoniosas, y consecuentemente útiles y bellas a la vez, y serán capaces de afectar a la sensibilidad especial del geómetra. Una vez surgidas, dirigiremos nuestra atención sobre ellas, y entonces tendrán la oportunidad de volverse conscientes.

Esto es únicamente una hipótesis, pero hay una observación que tiende a confirmarla. Cuando una iluminación súbita invade la mente del matemático, casi nunca lo engaña. Pero también sucede a veces que, como ya he dicho, no soporte la prueba de la verificación. Pues bien, casi siempre se ha de observar que esta falsa idea, si hubiese sido correcta, habría adulado a nuestro instinto natural para la elegancia matemática.

De esta forma, es esta sensibilidad estética especial la que desempeña el papel del delicado tamiz del que ya he hablado, y esto hace lo suficientemente claro el porqué el hombre que carece de ella nunca será un verdadero descubridor.

Sin embargo, no han desaparecido todas las dificultades. El ego consciente está estrictamente limitado, pero en cuanto al ego subliminal, no conocemos sus limitaciones, y de aquí que no estemos muy reacios a suponer que, en un corto periodo de tiempo, pueda formar más combinaciones distintas de las que pueda comprender toda la vida de un ser consciente. Estas limitaciones, no obstante, existen. ¿Es concebible que [el ego inconsciente] pueda formar todas las combinaciones posibles, cuyo número haga tambalear a la imaginación? Con todo, esto parecería ser necesario, porque si sólo produjese una pequeña porción de las combinaciones, y eso por casualidad, habría muy poca probabilidad de que la *correcta* - aquella que debe ser seleccionada - se encuentre entre ellas.

Quizá debamos buscar la explicación en aquel periodo de trabajo consciente preliminar que siempre precede todo trabajo inconsciente fructífero. Si se me permite una comparación vulgar, representemos a los futuros elementos de nuestras combinaciones como algo parecido a los ganchudos átomos de Epicuro. Cuando la mente está en completo reposo, estos átomos están inmóviles; están, por decirlo de alguna manera, unidos a la pared. Este reposo completo puede continuar

indefinidamente sin que los átomos se encuentren y, consecuentemente, sin posibilidad alguna de la formación de cualquier combinación.

Por otra parte, durante un periodo de aparente reposo, pero de trabajo inconsciente, algunos de ellos se separan de la pared y se ponen en movimiento. Se abren paso en todas direcciones a través del espacio, como un enjambre de mosquitos o, si se prefiere una comparación más erudita, como las moléculas gaseosas en la teoría cinética de los gases. Sus mutuas colisiones pueden producir entonces nuevas combinaciones.

¿Cuál es la parte que desempeña el trabajo consciente preliminar? Claramente es liberar algunos de estos átomos, separarlos de la pared y ponerlos en movimiento. Pensamos no haber conseguido nada cuando hemos agitado los elementos de mil maneras distintas para intentar acomodarlos y no hemos encontrado un arreglo satisfactorio. Pero después de esta agitación, no regresarán a su reposo original, sino continuarán circulando libremente.

Ahora bien, nuestra voluntad no los ha seleccionado al azar, sino en búsqueda de un objetivo perfectamente definido. Aquellos que ha liberado no son, por tanto, átomos casuales, sino aquellos de los que razonablemente podemos esperar la solución deseada. Los átomos liberados experimentarán, pues, colisiones, ya sea unos con otros, o con los átomos que han permanecido inmóviles, y contra los cuales chocarán en su curso. Me disculpo una vez más si mi comparación parece muy tosca, pero no puedo encontrar una forma mejor de exponer mi pensamiento sobre esta cuestión.

Sea como fuere, las únicas combinaciones que tienen posibilidad alguna de ser formadas son aquellas en donde por lo menos uno de los elementos es uno de los átomos deliberadamente seleccionados por nuestra voluntad. Ahora, evidentemente lo que he llamado la combinación *correcta* se encuentra entre estos últimos. Quizá haya aquí algún medio para modificar lo que resultó paradójico en la hipótesis original.

Una observación más. Nunca sucede que el trabajo inconsciente suministre el resultado *confeccionado* de un cálculo largo en donde sólo tengamos que aplicar reglas fijas. Podría suponerse que el ego subliminal, puramente automático como es, se ajusta peculiarmente a este tipo de trabajo que es, en un sentido, exclusivamente mecánico. Parecería que, al pensar durante la noche sobre los factores de una multiplicación, podríamos esperar encontrar el producto confeccionado al caminar o, de nuevo, que una ecuación algebraica, por ejemplo, o una verificación podría hacerse inconscientemente. La observación prueba que este no es el caso en absoluto. Todo lo que podemos esperar

de estas inspiraciones, que son los frutos del trabajo inconsciente, es obtener puntos de partida para tales cálculos. En cuanto a los cálculos por sí mismos, éstos deben hacerse en el segundo periodo de trabajo consiente que sigue a la inspiración, y en donde se verifican los resultados de tal inspiración y se deducen sus consecuencias. Las reglas de estos cálculos son estrictas y complejas; demandan disciplina, atención, voluntad, y, consecuentemente, consciencia. En el ego subliminal, por el contrario, reina lo que he llamado libertad, si uno pudiese dar este nombre a la mera ausencia de disciplina y al desorden que nace de la casualidad. Sólo que este mismo desorden permite uniones inesperadas.

Haré una última observación. Cuando antes relaté algunas observaciones personales, hablé de una noche de agitación, en la que trabajé a pesar de mí mismo. Los casos de lo anterior son frecuentes, y no es necesario que la actividad cerebral anormal sea causada por un estimulante físico, como en el caso citado. Pues bien, parece que, en estos casos, asistimos a nuestro propio trabajo inconsciente, que se vuelve parcialmente perceptible a la consciencia sobreexcitada, pero que no cambia, por ese motivo, su naturaleza. Entonces nos volvemos vagamente conscientes de lo que distingue ambos mecanismos o, si se prefiere, de los métodos de trabajo de los dos egos. Las observaciones psicológicas que he hecho parecen confirmar, en sus características generales, los puntos de vista que he venido enunciando.

Ciertamente hay una gran necesidad de esto, porque, a pesar de todo, son y permanecen [las observaciones] como hipotéticas. El interés de la cuestión es tan grande que no me arrepiento de haberlas presentado al lector.

CAPÍTULO IV

CASUALIDAD

I

"¿Cómo podemos aventurarnos a hablar de las leyes de la casualidad? ¿No es la casualidad la antítesis de toda ley?" Es así como Bertrand se expresa al principio de su "Cálculo de Probabilidades". La probabilidad es lo opuesto de la certeza; es, pues, lo que ignoramos, y consecuentemente parecería ser lo que no podemos calcular. Aquí hay, por lo menos, una aparente contradicción, y una sobre la que ya se ha escrito mucho.

Para empezar, ¿qué es la casualidad? Los antiguos distinguían entre los fenómenos que parecían obedecer leyes armoniosas, establecidas de una vez y para siempre, de aquellos que atribuían a la casualidad y no podían predecirse porque no estaban sujetos a ley alguna. En cada dominio, las leyes precisas no decidían todo, sino que establecían los límites dentro de los cuales la casualidad podía moverse. En esta concepción, la palabra *casualidad* tenía un significado preciso y objetivo; lo que era la casualidad para uno lo era también para el otro, e incluso para los dioses.

Pero esta no es nuestra concepción. Nos hemos vuelto completamente deterministas, e incluso aquellos que desean preservar algo del libre albedrío humano permiten que el determinismo reine, por lo menos, en el mundo inorgánico.[5] Cada fenómeno, sin importar qué tan insignificante sea, tiene una causa, y una mente infinitamente poderosa e infinitamente bien informada con respecto a las leyes de la naturaleza podría prever tales fenómenos desde el comienzo de los tiempos. Si existiese un ser con tal mente, no podríamos participar en un juego de azar con él: siempre perderíamos.

Para él, en realidad, la palabra *casualidad* no tendría sentido alguno, o más bien no habría tal cosa como la casualidad. Que la haya para nosotros es sólo a causa de nuestra fragilidad y nuestra ignorancia. E incluso sin ir más allá de nuestra frágil humanidad, lo que es casual para el ignorante no lo es para el sabio. La casualidad es

[5] Poincaré habla de un *mundo inorgánico* que para nosotros en realidad sería lo que llamamos o llamaríamos *mundo natural* o *naturaleza*. Nota del Traductor.

sólo la medida de nuestra ignorancia, y los fenómenos fortuitos son, por definición, aquellos cuyas leyes desconocemos.

¿Pero es satisfactoria esta definición? Cuando los primeros pastores astrólogos siguieron con sus ojos los movimientos de las estrellas, no conocían aún las leyes astronómicas, pero ¿habrían dicho que las estrellas se mueven por casualidad? Si un físico moderno está estudiando un nuevo fenómeno y descubre su ley un martes, ¿habría dicho el lunes anterior que el fenómeno era fortuito? Pero más que esto, ¿no recurrimos frecuentemente a lo que Bertrand llama las leyes del azar para predecir un fenómeno? Por ejemplo, en la teoría cinética de los gases, encontramos las bien conocidas leyes de Mariotte y de Gay-Lussac, gracias a la hipótesis de que las velocidades de las moléculas gaseosas varían de manera irregular, es decir, por casualidad. Las leyes observables serían mucho más simples, dicen todos los físicos, si las velocidades estuviesen reguladas por alguna ley simple y elemental, si las moléculas estuviesen, como dicen ellos, *organizadas*, si estuviesen sujetas, pues, a alguna disciplina. Es gracias a la casualidad - esto es, gracias a nuestra ignorancia - que podemos llegar a conclusiones. Entonces, si la palabra *casualidad* es simplemente sinónimo de ignorancia, ¿qué significa? ¿Debemos traducirla como lo que sigue?:

"Me pides predecir los fenómenos que tendrán lugar. Si tuviese la desgracia de conocer las leyes de estos fenómenos, no podría predecirlos excepto a partir de cálculos inextricables, y tendría que renunciar al intento de responder; pero como soy lo suficientemente afortunado como para ignorar sus leyes, te daré una respuesta inmediata. Y, lo que es más extraordinario aún, mi respuesta será correcta".

La casualidad debe ser, pues, algo más que el nombre que damos a nuestra ignorancia. Entre los fenómenos cuyas causas desconocemos, debemos distinguir entre fenómenos fortuitos, sobre los cuales el cálculo de probabilidades nos dará información provisional, y aquellos que no son fortuitos, y sobre los cuales no podemos decir nada en cuanto no hayamos determinado las leyes que los gobiernan. Y en cuanto a los fenómenos fortuitos por sí mismos, es claro que la información que el cálculo de probabilidades provee no dejará de ser cierta cuando los fenómenos sean mejor conocidos.

El gerente de una compañía de seguros no sabe cuándo morirá cada uno de los asegurados, pero se apoya en el cálculo de probabilidades y en la ley de grandes números, y no comete error alguno, porque es capaz de pagar dividendos a sus accionistas. Estos dividendos no desaparecerían si un doctor muy previsor e indiscreto

llegase y, ya firmadas las pólizas, diera al gerente información sobre las probabilidades de vida del asegurado. El doctor disiparía la ignorancia del gerente, pero no tendría efecto alguno sobre los dividendos, que evidentemente no son el resultado de tal ignorancia.

II

Para poder encontrar la mejor definición de casualidad, debemos examinar algunos de los hechos que se consideran como fortuitos, y a los que parece aplicarse el cálculo de probabilidades. Intentaremos, pues, encontrar sus características comunes.

Como primer ejemplo consideraremos al equilibro inestable. Si un cono se encuentra equilibrado en su punto, sabemos muy bien que caerá, pero no sabemos hacia qué lado, y parecería que sólo la casualidad lo decidirá. Si el cono fuese perfectamente simétrico, si su eje fuese perfectamente vertical, y si no estuviese sujeto a fuerza alguna excepto a la gravedad, no caería en absoluto. Pero el menor defecto simétrico hace que se incline ligeramente hacia un lado o hacia otro, y en el momento en que esto sucede, aunque sea muy poco, el cono caerá hacia el lado en que se inclinó. Incluso si la simetría fuese perfecta, un ligero azoramiento, o una ráfaga de viento, harían que se inclinase un poco, y eso resultaría suficiente para determinar su caída e incluso la dirección de ésta, que no sería otra sino la de la inclinación original.

Una causa muy pequeña que escapa a nuestra atención determina un efecto considerable que no podemos dejar de ver, y entonces decimos que tal efecto se debe a la casualidad. Si conociésemos de manera exacta las leyes de la naturaleza y la situación del Universo en el momento inicial, podríamos predecir - igualmente de manera exacta - la situación de tal Universo en un momento subsecuente. Pero, incluso si fuese tal caso, sólo podríamos conocer la situación inicial de manera *aproximada*. Si eso nos permitiese predecir la situación subsecuente *con la misma aproximación*, sería todo lo que necesitamos, y podríamos decir que el fenómeno ha sido predicho, y que está gobernado por ciertas leyes. Pero no siempre es así; bien puede suceder que pequeñas diferencias en las condiciones iniciales produzcan unas [diferencias] muy grandes en los fenómenos finales. Un pequeño error en las primeras producirá un enorme error en los últimos. La predicción, entonces, se vuelve imposible, y nos encontramos con un fenómeno fortuito.

Nuestro segundo ejemplo será muy parecido al primero, y lo tomaremos prestado de la meteorología. ¿Por qué es tan difícil a los meteorólogos predecir el clima? ¿Por qué es que las lluvias e incluso las tormentas parecen suceder por casualidad, de tal suerte que muchas personas consideran muy natural rezar por la lluvia o por un buen clima, y no obstante consideran ridículo rezar por un eclipse? Observamos que las grandes perturbaciones ocurren generalmente en regiones donde la atmósfera tiene un equilibrio inestable. El meteorólogo sabe muy bien que el equilibrio es inestable, que un ciclón se formará en algún lado, pero no sabe exactamente dónde; una décima de un grado más o menos en un punto dado, y el ciclón estallará aquí y no allá, y hará estragos sobre ciudades que de otra forma habría evitado. Si los meteorólogos hubiesen sido conscientes de esta décima de un grado, podrían haber sabido sobre el ciclón de antemano, pero las observaciones, o no fueron lo suficientemente exhaustivas, o no fueron lo suficientemente precisas, y esa es la razón por la cual todo parece deberse a la intervención de la casualidad. Aquí, de nuevo, encontramos el mismo contraste entre una causa insignificante inapreciable al observador, y unos efectos considerables, que a menudo resultan en terribles desastres.

Pasemos a otro ejemplo, a saber, la distribución de los planetas menores en el Zodiaco. Sus longitudes iniciales pudieron haber tenido algún orden definido, pero sus movimientos medios fueron distintos, y desde entonces han girado tanto que podríamos decir que, prácticamente, están distribuidos *por casualidad* a lo largo del Zodiaco. Diferencias iniciales muy pequeñas en sus distancias con respecto al Sol o, lo que viene a ser lo mismo, en sus movimientos medios, han resultado en enormes diferencias en sus longitudes actuales. Una diferencia de una milésima parte de un segundo en su movimiento medio diario tendrá el efecto de un segundo en tres años, un grado en diez mil años, una circunferencia completa en tres o cuatro millones de años, y entonces surge la pregunta: ¿qué es eso, además del tiempo, que ha transcurrido desde que los planetas menores se separaron de la nebulosa de Laplace? Aquí, otra vez, tenemos una pequeña causa y un gran efecto o, mejor dicho, pequeñas diferencias en la causa y grandes diferencias en el efecto.

El juego de la ruleta no se aleja tanto como podría parecer del ejemplo precedente. Imaginemos una aguja que puede girar alrededor de un pivote que se encuentra sobre un disco dividido en cientos de secciones rojas y negras que están dispuestas de manera alternativa. Si la aguja se detiene en una sección roja, ganamos; si no, perdemos. Claramente, todo depende del impulso inicial que demos a la aguja.

Asumimos que la aguja girará diez o veinte veces, pero que se detendrá antes o más tarde dependiendo de la fuerza que le hayamos dado al giro del disco. Solamente una variación milimétrica o incluso menor en el impulso es suficiente para determinar si la aguja se detendrá en una sección negra o en la siguiente sección, que es roja. Estas son diferencias que el sentido muscular no puede apreciar, y que eluden incluso a los instrumentos más delicados. Nos resulta, por tanto, imposible predecir qué hará la aguja, y es por eso que dejamos todo a la casualidad. La diferencia en la causa es imperceptible, pero la diferencia en el efecto me resulta muy importante, ya que afecta a mi juego entero.

III

Sobre esto, deseo hacer una reflexión un tanto ajena a nuestro tema. Hace algunos años, cierto filósofo dijo que el futuro estaba determinado por el pasado, pero no así el pasado por el futuro; o, en otras palabras, que a partir del conocimiento del presente podíamos deducir el del futuro, pero no el del pasado porque, decía tal filósofo, una causa puede producir sólo un efecto, mientras que el mismo efecto puede ser producido por varias causas distintas. Es obvio que ningún científico puede aceptar esta conclusión. Las leyes de la naturaleza vinculan el antecedente con el consecuente de tal forma que el antecedente está determinado por el consecuente tanto como el consecuente lo está por el antecedente. ¿Cuál pudo haber sido, pues, el origen del error del filósofo? Sabemos que, en virtud del principio de Carnot, los fenómenos físicos son irreversibles y que el mundo tiende hacia la uniformidad. Cuando dos cuerpos de distintas temperaturas están en conjunción, el más caliente da calor al más frío y, a partir de esto, podemos predecir que las temperaturas se igualarán. Pero una vez igualadas, si nos preguntamos acerca del estado previo, ¿qué podemos responder? Ciertamente podemos decir que uno de los cuerpos estaba caliente y el otro frío, pero no podemos conjeturar cuál de los dos estaba caliente primero.

Y sin embargo, en realidad, las temperaturas nunca alcanzan una igualdad perfecta. La diferencia entre las temperaturas sólo tiende hacia cero de manera asíntota. De acuerdo con esto, llega un momento en que nuestros termómetros son incapaces de revelar tal condición. Pero aun cuando contásemos con termómetros mil veces o cien mil veces más sensibles, reconoceríamos una pequeña diferencia, y también que uno de

los cuerpos se ha conservado un poco más caliente que el otro, y entonces estaremos en condiciones de declarar que éste era el que primero estaba más caliente que aquél.

Ahora resulta que tenemos lo opuesto de lo que encontramos en los ejemplos precedentes, es decir, grandes diferencias en la causa y pequeñas diferencias en el efecto. Flammarion[6] alguna vez imaginó un observador alejándose de la Tierra a una velocidad mayor que la de la luz. Para él, el tiempo habría cambiado de signo, la historia se invertiría, y Waterloo hubiese sucedido antes que Austerlitz. Pues bien, para este observador los efectos y las causas estarían invertidos, el equilibrio inestable ya no sería una excepción, y, a cuenta de la irreversibilidad universal, todo le parecería venir de una especie de caos en equilibrio inestable, y la totalidad de la naturaleza parecería estar abandonada a la casualidad.

IV

Llegamos ahora a otro tipo de argumentos, en los cuales veremos características un tanto distintas. En primer lugar, consideremos la teoría cinética de los gases. ¿Cómo es que debemos imaginar un receptáculo lleno de gas? Innumerables moléculas, animadas a gran velocidad, se mueven por el receptáculo en todas direcciones; cada momento colisionan, o con los lados [del receptáculo], o bien unas con otras, y estas colisiones tienen lugar bajo las condiciones más variadas. Lo que más llama la atención de este caso no es tanto la pequeñez de las causas, sino su complejidad. Y, no obstante, el primer elemento también se encuentra aquí, y desempeña un papel importante. Si una molécula se desvía de su trayectoria hacia la izquierda o hacia la derecha en un grado muy pequeño comparado con el radio de acción de las moléculas gaseosas, evitará una colisión determinada, o la sufrirá bajo distintas condiciones, y esto alterará la dirección de su velocidad, después de la colisión, quizá por 90 o 180 grados.

Pero eso no es todo. Es suficiente, como hemos visto, con que la molécula se desvíe, antes de la colisión, en un grado infinitamente pequeño para que se desvíe, después de la colisión, en un grado finito. Entonces, si la molécula sufre dos colisiones sucesivas, es suficiente con que se desvíe, antes de la primera colisión, en un grado infinitamente pequeño de segundo orden, para que se desvíe, después de la primera colisión, en un grado infinitamente pequeño de primer orden, y después de la segunda

[6] Camille Flammarion, astrónomo francés (1842-1925). Nota del Traductor.

colisión, en un grado finito. Y la molécula no sufrirá solamente dos colisiones, sino un gran número de ellas cada segundo. De tal suerte que, si la primera colisión multiplicó la desviación por un gran número *A*, después de *n* colisiones será multiplicada por A^n. Se habrá vuelto, por tanto, muy grande, no sólo porque *A* es grande - esto es, porque pequeñas causas producen grandes efectos -, sino porque el exponente *n* es también grande, es decir, porque las colisiones son muy numerosas y las causas muy complejas.

Pasemos a un segundo ejemplo. ¿Por qué es que, en la lluvia, las gotas que caen parecen estar distribuidas al azar? Esto se debe, de nuevo, a la complejidad de las causas que determinan su formación. Los iones se han distribuido a través de la atmósfera, y por un largo tiempo han estado sujetos a corrientes de aire que cambian constantemente; han estado envueltos en torbellinos de dimensiones muy pequeñas, de tal forma que su distribución final ya no tiene relación alguna con su distribución original. De pronto, baja la temperatura, el vapor se condensa, y cada uno de estos iones se vuelve el centro de una gota de agua. Para saber cómo se distribuirán estos iones y cuántos caerán en cada piedra del pavimento, no es suficiente con conocer su posición original, sino que debemos calcular el efecto de un millar de minuciosas y caprichosas corrientes de aire.

Sucede lo mismo si consideramos los granos de polvo que se encuentran en suspensión en el agua. El recipiente está impregnado por corrientes sobre las que ignoramos todo excepto que sus leyes son muy complejas. Después de cierto tiempo, los granos estarán distribuidos por casualidad, esto es, de manera uniforme y a lo largo del recipiente, y esto se debe, en su totalidad, a la complejidad de las corrientes. Si obedeciesen alguna ley simple - si, por ejemplo, el recipiente girase y las corrientes girasen, a su vez, en círculos sobre su eje -, el caso se alteraría, ya que cada grano mantendría su altura y su distancia originales con respecto al eje.

Llegaremos al mismo resultado si imaginamos la mezcla de dos líquidos o de dos polvos finos. Para tomar un ejemplo más áspero, es también lo que sucede cuando se baraja un paquete de cartas. En cada barajada, las cartas experimentan una permutación similar a la estudiada en la teoría de las sustituciones. ¿Cuál será la permutación resultante? La probabilidad de que sea cualquier permutación particular (por ejemplo, la que lleve a que la carta ocupando la posición ϕ (*n*) antes de la permutación ocupe la posición *n* después de ella), esta probabilidad, decía, depende de los hábitos del jugador. Pero si el jugador baraja las cartas por suficiente tiempo, habrá un gran número de permutaciones sucesivas, y el orden final que resulte ya no estará gobernado por nada excepto la casualidad; me refiero a que todos los posibles órdenes

serán igualmente probables. Este resultado obedece al gran número de permutaciones sucesivas, es decir, a la complejidad del fenómeno.

Unas últimas palabras sobre la teoría de los errores. En un caso en donde las causas sean complejas y múltiples, ¿qué tan numerosas son las trampas a las que está expuesto el observador, incluso con los mejores instrumentos a su disposición? Deben hacerse muchos esfuerzos para tener en cuenta tales errores y evitar los más flagrantes, aquellos que dan lugar a los errores sistemáticos. Pero cuando éstos se han eliminado, y admitiendo que ya no aparezcan más, aún quedan muchos [errores] que, aunque pequeños, pueden volverse peligrosos debido a la acumulación de sus efectos. Es por esto que surgen los errores accidentales, y los atribuimos a la casualidad porque sus causas son demasiado complejas y numerosas. Aquí tenemos, otra vez, únicamente causas pequeñas, y aunque cada una de ellas sólo producirá un efecto pequeño, es por su unión y su número que sus efectos se vuelven formidables.

V

Pero hay un tercer punto de vista, menos importante que los dos anteriores, y sobre el que no pondré tanta atención. Cuando tratamos de predecir un hecho y examinamos los antecedentes, nos empeñamos en indagar en la situación anterior. Pero no podemos hacer esto para cada parte del Universo, y nos contentamos con saber qué es lo que sucede en la proximidad del lugar en donde tendrá lugar el hecho, o con aquello que parece tener alguna conexión con él. Nuestra indagación no puede ser completa, y debemos saber cómo seleccionar. Sin embargo, podemos pasar por alto circunstancias que, a primera vista, parecen totalmente ajenas al hecho anticipado, y a las cuales nunca hubiésemos atribuido influencia alguna sobre tal hecho, pero que, contrario a toda anticipación, vienen a desempeñar un papel importante.

Un hombre camina por la calle camino a su trabajo. Alguien familiar con tal trabajo podría decir las razones que este hombre tuvo para ir a tal hora y por tal calle. Sobre uno de los techos de la calle, un albañil está trabajando. El patrón que lo emplea podría predecir, hasta cierto grado, lo que este trabajador hará. Pero el hombre [que pasea camino a su trabajo] no tiene consideración alguna por el albañil, ni éste por aquél; parecen pertenecer a dos mundos completamente ajenos el uno del otro. Sea como fuere, el albañil deja caer una baldosa que mata al hombre que va camino a su trabajo, y no dudaríamos en decir que este hecho fue azaroso.

Nuestra flaqueza no nos permite considerar al Universo en su totalidad, sino que nos fuerza a cortarlo en pedazos. Intentamos hacer esto tan poco artificial como sea posible, y no obstante sucede que, de tiempo en tiempo, dos de estos pedazos reaccionan uno sobre el otro, y entonces los efectos de esta acción mutua parecen deberse a la casualidad.

¿Es lo anterior un tercer modo de concebir la casualidad? No siempre; en realidad, en la mayoría de los casos, volvemos al primero o al segundo. Cada vez que dos mundos, generalmente extraños el uno al otro, actúan uno sobre el otro, las leyes de esta reacción vienen a ser muy complejas y, es más, un cambio muy pequeño en las condiciones iniciales de los dos mundos sería suficiente para evitar que tal reacción tenga lugar. ¡Qué tan poco habría tomado que el hombre pasase un momento después, o que el albañil hubiese dejado caer la baldosa en momento antes!

VI

Nada de lo que se ha dicho hasta ahora explica por qué la casualidad obedece ciertas leyes. ¿Es el hecho de que las causas sean pequeñas, o de que sean complejas, suficiente para permitirnos predecir, si no qué efectos habrá *en cada caso*, sí por lo menos cómo serán *en promedio*? Para responder esta cuestión, será mejor regresar a algunos de los ejemplos anteriores.

Comenzaré con la ruleta. Dije antes que el punto done se detiene la aguja dependerá del impulso inicial dado a ésta. ¿Cuál es la probabilidad de que este impulso sea de cualquier intensidad particular? No lo sé, pero resulta difícil no admitir que esta probabilidad está representada por una función analítica continua. La probabilidad de que el impulso esté comprendido entre α y $\alpha + \epsilon$ será, por tanto, claramente igual a la probabilidad de que esté comprendido entre $\alpha + \epsilon$ y $\alpha + 2\epsilon$, *siempre que* ϵ *sea muy pequeña*. Esta es una propiedad común a todas las funciones analíticas. Pequeñas variaciones de la función son proporcionales a pequeñas variaciones de la variable.

Pero hemos asumido que una variación muy pequeña en el impulso es suficiente para cambiar el color de la sección opuesta a donde finalmente se detiene la aguja. De α a $\alpha + \epsilon$ es roja, y de $\alpha + \epsilon$ a $\alpha + 2\epsilon$ es negra. La probabilidad de cada sección roja es, por consiguiente, la misma que la de la sucesiva sección negra y, consecuentemente, la probabilidad total de [secciones] rojas es igual a la probabilidad total de negras.

El dato, en este caso, es la función analítica que representa la probabilidad de un impulso inicial particular. Pero el teorema sigue siendo cierto sin importar cuáles sean los datos, porque depende de una propiedad común a todas las funciones analíticas. De esto resulta, finalmente, que ya no tenemos necesidad de dato alguno.

Lo que se ha dicho ahora sobre la ruleta aplica también para los planetas menores. El Zodiaco puede ser considerado como una inmensa ruleta sobre la cual el Creador ha arrojado un gran número de bolas pequeñas, a las que ha impartido distintos impulsos iniciales variando, sin embargo, de acuerdo con algún tipo de ley. Su distribución actual es uniforme e independiente de tal ley, por la misma razón que en el caso precedente. Así, vemos por qué los fenómenos obedecen las leyes de la casualidad cuando pequeñas diferencias en las causas son suficientes para producir grandes diferencias en los efectos. Las probabilidades de estas pequeñas diferencias pueden entonces considerarse como proporcionales a las diferencias mismas, justamente porque estas diferencias son pequeñas, y pequeños incrementos de una función continua son proporcionales a aquellos de la variable.

Pasemos a un ejemplo totalmente diferente, en donde la complejidad de las causas es el factor principal. Imaginemos un jugador barajando un paquete de cartas. En cada barajada, cambia el orden de las cartas, y puede cambiar de varias maneras. Para simplificar la explicación, tomemos sólo tres cartas. Las cartas que, antes de la barajada, ocupaban las posiciones 1 2 3 respectivamente, pueden ocupar, después de la barajada, las posiciones

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, 1 3 2, 2 1 3.[7]

Cada una de estas seis hipótesis es posible, y sus probabilidades son, respectivamente,

$$P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6.$$

La suma de estos seis números es igual a 1, pero eso es todo lo que sabemos sobre ellos. Las seis probabilidades dependen, naturalmente, de los hábitos del jugador, que no conocemos.

En la segunda barajada, el proceso se repite bajo las mismas condiciones. Quiero decir, por ejemplo, que p_4 siempre representa la probabilidad de que tres cartas que ocupaban las posiciones 1 2 3 después de la barajada n y antes de la $n+1$, ocuparán las posiciones 3 2 1 después de la barajada $n+1$. Y esto sigue siendo cierto sin importar

[7] Porque $3! = 6$. Nota del Traductor.

qué número sea *n*, porque los hábitos del jugador y su método de barajar siguen siendo los mismos.

Pero si el número de barajadas es muy grande, las cartas que ocupaban las posiciones 1 2 3 antes de la primera barajada pueden ocupar, después de la última, las posiciones

1 2 3, 2 3 1, 3 1 2, 3 2 1, 1 3 2, 2 1 3,

y la probabilidad de cada una de estas seis hipótesis es claramente la misma e igual a $\frac{1}{6}$; y esto es cierto sin importar cuáles sean los números $p_1 ... p_6$, que no conocemos. El gran número de barajadas, es decir, la complejidad de las causas, ha producido uniformidad.

Esto aplica invariablemente si hubiese más de tres cartas, pero incluso con tres la demostración sería complicada, así que me contentaré con exponerla con sólo dos cartas. Ahora únicamente tenemos dos hipótesis

1 2, 2 1,

con las probabilidades p_1 y $p_2 = 1 - p_1$. Asumamos que hay *n* barajadas, y que ganaremos si las cartas se colocan finalmente en el orden inicial, y perderemos si finalmente está invertido tal orden. Entonces mi expectativa matemática será

$$(p_1 - p_2)^n$$

La diferencia $p_1 - p_2$ es ciertamente menor que 1, de tal suerte que si *n* es muy grande, el valor de mi expectativa será nulo, y no requeriremos conocer p_1 y p_2 para saber que el juego es justo.

No obstante, habría una excepción si uno de los números p_1 o p_2 fuese igual a 1 y el otro igual a nada. *Entonces lo anterior ya no se mantendría, porque nuestra hipótesis original sería demasiado simple*.

Lo que hemos visto aplica no sólo para la mezcla de cartas, sino para toda mezcla, a la de polvos y líquidos, y también a la de las moléculas gaseosas en la teoría cinética de los gases. Regresando a esta teoría, imaginemos por un momento un gas cuyas moléculas no pueden colisionar mutuamente, pero sí pueden desviarse por colisiones con los lados del recipiente en el que está encerrado el gas. Si la forma del recipiente es lo suficientemente compleja, no pasará mucho antes de que la distribución de las moléculas y la de sus velocidades se vuelvan uniformes. Esto no sucederá si el recipiente es esférico, o si tiene la forma de un paralelepípedo rectangular. ¿Y por qué

no? Porque, en el primer caso, la distancia de cualquier trayectoria particular desde el centro se mantiene constante, y en el último caso tenemos el valor absoluto del ángulo de cada trayectoria con los lados del paralelepípedo.

De esta forma, observamos qué debemos comprender por condiciones *demasiado simples*. Son condiciones que preservan algo del estado original como invariable. ¿Son las ecuaciones diferenciales del problema demasiado simples para permitirnos aplicar las leyes de la casualidad? Esta pregunta parece no tener, a primera vista, sentido preciso alguno, pero sabemos qué significa. Son demasiado simples si algo [del estado original] se preserva, si admiten una integral uniforme. Si algo de las condiciones iniciales permanece sin cambios, es claro que la situación final ya no podrá ser independiente de la situación original.

Llegamos, por último, a la teoría de los errores. Ignoramos a qué se deben los errores accidentales, y es precisamente por esta ignorancia que sabemos que obedecen a la ley de Gauss. Tal es la paradoja, y se explica de una manera algo parecida a como explicamos los casos precedentes. Solamente necesitamos saber una cosa: que los errores son muy numerosos, que son muy pequeños, y que cada uno de ellos puede ser igualmente negativo o positivo. ¿Cuál es la curva de probabilidad de cada uno de ellos? No lo sabemos, pero podemos asumir que es simétrica. Podemos entonces demostrar que el error resultante seguirá a la ley de Gauss, y esta ley resultante es independiente de las leyes particulares que no conocemos. Aquí, de nuevo, la simplicidad del resultado en realidad debe su existencia a la complejidad de los datos.

VII

Pero no hemos llegado al final de las paradojas. Justo antes relaté la ficción de Flammarion, en donde el tiempo ha cambiado de signo para un hombre que viaja más rápido que la luz. Dije también que, para él, todos los fenómenos parecerían deberse a la casualidad. Esto es verdad desde un cierto punto de vista y, sin embargo, en cualquier momento dado todos estos fenómenos no estarían distribuidos en conformidad con las leyes de la casualidad, ya que serían justo como son para nosotros quienes, viéndolos armoniosamente desplegados y no emergiendo de un caos primitivo, no los consideramos como si estuviesen gobernados por la casualidad.

¿Qué significa esto? Para el *Lumen*[8] imaginario de Flammarion, pequeñas causas parecen producir grandes efectos; ¿por qué, entonces, las cosas no suceden como lo hacen para nosotros cuando pensamos ver grandes efectos debidos a pequeñas causas? ¿No aplica a este caso el mismo razonamiento?

Regresemos, pues, a este razonamiento. Cuando pequeñas diferencias en las causas producen grandes diferencias en los efectos, ¿por qué están los efectos distribuidos de acuerdo con las leyes de la casualidad? Supongamos que una diferencia de un centímetro en la causa produce una diferencia de un kilómetro en el efecto. Si obtenemos una ganancia cuando el efecto corresponda a un kilómetro teniendo un número par, entonces nuestra probabilidad de ganar será de $\frac{1}{2}$. ¿Por qué? Porque, para que esto sea así, la causa debe corresponder a un centímetro teniendo un número par. Ahora bien, según todas las apariencias, la probabilidad de que la causa varíe entre ciertos límites es proporcional a la distancia de tales límites, siempre y cuando tal distancia sea muy pequeña. Si no se admite esta hipótesis, ya no habría medio alguno para representar la probabilidad a partir de una función continua.

Ahora, ¿qué sucede cuando grandes causas producen pequeños efectos? Este es el caso en donde no debemos atribuir el fenómeno a la casualidad, y en el que Lumen, por el contrario, sí lo atribuiría a la casualidad. Una diferencia de un kilómetro en la causa corresponde a una diferencia de un centímetro en el efecto. ¿Será la probabilidad de que la causa esté comprendida entre dos límites separados por *n* kilómetros aún proporcional a *n*? No tenemos razón alguna para suponerlo así, ya que la distancia de *n* kilómetros es grande. Pero la probabilidad de que el efecto esté comprendido entre dos límites separados por *n* centímetros será precisamente la misma y, por consiguiente, no será proporcional a *n*, y lo anterior a pesar del hecho de que esta distancia de *n* centímetros es pequeña. No hay, por tanto, medio alguno para representar la ley de probabilidad de los efectos por una curva continua. Con esto no pretendo decir que la curva no pueda permanecer continua en el sentido *analítico* de la palabra. A variaciones *infinitamente pequeñas* de la abscisa corresponderán variaciones infinitamente pequeñas de la ordenada. Pero *prácticamente* no será continua, ya que a *muy pequeñas* variaciones de la abscisa no corresponderán variaciones muy pequeñas de la ordenada. Sería imposible trazar la curva con un lápiz ordinario; eso es lo que quiero decir.

[8] *Lumen* es el título de uno de los libros de este autor. Nota del Traductor.

¿Qué conclusión debemos sacar? Lumen no tiene derecho a decir que la probabilidad de la causa (la de *su* causa, que es nuestro efecto) debe necesariamente estar representada por una función continua. Pero si esto es así, ¿por qué nosotros sí tenemos el derecho? Es porque el estado del equilibrio inestable sobre el que hablé al principio es sólo la culminación de una gran historia anterior. En el curso de esta historia, han estado trabajando causas muy complejas, y lo han estado haciendo por mucho tiempo. Han contribuido a la mezcla de los elementos, y han tendido a hacer todo uniforme, por lo menos en un espacio pequeño. Han redondeado las esquinas, nivelado las montañas, y llenado los valles. Sin importar qué tan caprichosa e irregular haya sido su curva original, han trabajado tanto para regularizarla que finalmente nos proporcionarán una curva continua, y es por eso que podemos admitir, con toda confianza, su continuidad.

Lumen carecería de las mismas razones para sacar sus conclusiones. Para él, las causas complejas no serían agentes de la regularidad y de la nivelación, sino que sólo crearían diferenciación y desigualdad. Vería emerger un mundo cada vez más variado desde una especie de caos primitivo. Los cambios que observase serían para él imprevisibles e imposibles de predecir, y parecerían deberse a algún capricho, pero éste no sería de ninguna manera como nuestra casualidad, ya que no está sujeto a ley alguna, mientras que nuestra casualidad tiene sus propias leyes. Todos estos puntos requieren un desarrollo mucho mayor, que quizá nos ayudaría a comprender mejor la irreversibilidad del Universo.

VIII

Hemos intentado definir la casualidad, y ahora sería pertinente preguntarnos algo. ¿Tiene la casualidad, definida como ha sido hasta ahora, un carácter objetivo?

Bien podemos preguntarlo. He hablado de causas muy pequeñas o muy complejas, pero ¿no puede ser lo que es muy pequeño para uno ser grande para otro, y lo que parece ser muy complejo para uno ser simple para otro? Ya he ofrecido una respuesta parcial, porque arriba establecí precisamente el caso en el que las ecuaciones diferenciales se vuelven muy simples debido a que las leyes de la casualidad siguen siendo aplicables. Pero sería bueno examinar la cuestión un poco más de cerca, porque hay otros puntos de vista que podemos adoptar.

¿Cuál es el significado de la palabra *pequeño*? Para comprenderlo, únicamente tenemos que referirnos a lo ya dicho antes. Una diferencia es muy pequeña, un intervalo es pequeño, cuando dentro de los límites de tal intervalo la probabilidad sigue siendo apreciablemente constante. ¿Por qué puede tal probabilidad ser considerada como constante en un intervalo pequeño? Es porque admitimos que la ley de probabilidad está representada por una curva continua, no sólo continua en el sentido analítico de la palabra, sino también en un sentido *práctico*, tal como ya expliqué. Esto no solamente significa que no presentará un vacío absoluto, sino también que no tendrá proyecciones o depresiones demasiado graves o muy acentuadas.

¿Qué nos da el derecho a hacer esta hipótesis? Como dije antes, es porque, desde el principio de los tiempos, ha habido causas complejas que nunca cesan de operar en la misma dirección, y que hacen que el mundo tienda constantemente hacia la uniformidad sin la posibilidad de volver nunca hacia atrás. Son estas causas las que, poco a poco, han nivelado las proyecciones y llenado las depresiones, y es por esta razón que nuestras curvas de probabilidad no presentan sino suaves ondulaciones. En millones y millones de siglos, habremos dado otro paso hacia la uniformidad, y estas ondulaciones serán diez veces más suaves. El radio de la curvatura media de nuestra curva será diez veces mayor, y entonces una longitud que hoy no nos parece muy pequeña, porque un arco de tal longitud no puede considerarse como rectilíneo, será considerado, en tal periodo futuro, como muy pequeño, ya que la curvatura se habrá vuelto diez veces menor, y un arco de tal longitud no diferirá apreciablemente de una línea recta.

Así, la palabra *pequeño* sigue siendo relativa, pero no es relativa para este sentido o para otro, sino para el estado actual del mundo, y cambiará su significado cuando el mundo se vuelva más uniforme y todas las cosas estén más mezcladas. Pero entonces, sin duda, los hombres ya no podrán vivir, y tendrán que ceder el paso a otros seres. Estos seres, ¿serán mucho más pequeños o mucho más grandes? Nuestro criterio, pues, siendo cierto para todos los hombres, conserva su sentido objetivo.

Además, ¿cuál es el significado de las palabras *muy complejo*? Ya he dado una solución (que es la que referí al principio de esta sección), pero hay otras. Las causas complejas, como ya he dicho, producen una mezcla cada vez más profunda, pero ¿cuánto pasará antes de que esta mezcla nos satisfaga? ¿Cuándo habremos acumulado las suficientes complejidades? ¿Cuándo estarán las cartas lo suficientemente barajadas? Si mezclamos dos polvos, uno azul y otro blanco, llega un momento en el que el color de la mezcla aparece como uniforme. Esto se debe a la flaqueza de nuestros sentidos;

será uniforme para aquel que se vea obligado a observar tal mezcla desde lejos, pero no será así para el que la observe desde cerca. Incluso cuando se haya vuelto uniforme para todas las vistas, podemos hacer retroceder al límite empleando instrumentos. No hay posibilidad de que algún hombre distinga la infinita variedad oculta bajo la apariencia uniforme de un gas, si la teoría cinética es cierta. No obstante, si adoptamos las ideas de Gouy sobre el movimiento browniano, ¿no está el microscopio a punto de mostrarnos algo análogo?

Este nuevo criterio es, pues, relativo al primero, y si conserva un carácter objetivo es porque todos los hombres tienen los mismos sentidos, el poder de sus instrumentos es limitado y, además, hacen uso de ellos ocasionalmente.

IX

Sucede lo mismo en las ciencias morales, y particularmente en la historia. El historiador está obligado a hacer una selección de los eventos en el periodo que está estudiando, y sólo relata aquellos que considera más importantes. Así, se contenta con relatar los eventos más considerables del siglo dieciséis, por ejemplo, y similarmente los hechos más notables del siglo diecisiete. Si los primeros resultan suficientes para explicar los últimos, decimos que estos últimos están en conformidad con las leyes de la historia. Pero si un gran evento del siglo diecisiete debe su causa a un pequeño hecho del siglo dieciséis que ninguna historia reporta y que todo mundo ha descuidado, entonces decimos que este evento se debe a la casualidad, y así es como la palabra tiene el mismo sentido que en las ciencias físicas; significa que pequeñas causas han producido grandes efectos.

La mayor de las casualidades es el nacimiento de un gran hombre. El sólo por casualidad que ocurre el encuentro de dos células genitales de distintos sexos que contienen, precisamente, cada una por su lado, los misteriosos elementos cuya reacción mutua está destinada a producir un genio. Será fácilmente admitido que estos elementos deben ser extraños, y que su encuentro es todavía más extraño. Qué tan poco hubiera tomado para hacer que el espermatozoide que portaba tales elementos se desviase de su curso. Hubiese sido suficiente con desviarlo una centésima parte de un centímetro para que Napoleón nunca hubiese nacido y el destino de un continente nunca hubiese cambiado. Ningún ejemplo puede dar una mejor comprensión del verdadero carácter de la casualidad.

Unas palabras más acerca de las paradojas a las que ha dado lugar la aplicación del cálculo de probabilidades a las ciencias morales. Se ha demostrado que ningún parlamento contendrá solamente a un único miembro de la oposición, o por lo menos que tal evento sería tan improbable que resultaría muy seguro apostar contra él, y apostar un millón a uno. Condorcet intentó calcular cuántos jurados se requerirían para hacer que un malogro de la justicia sea prácticamente imposible. Si utilizamos los resultados de su cálculo, ciertamente estaremos expuestos a la misma desilusión que resultaría de apostar al cálculo que sostiene que la oposición nunca tendrá un único representante.

Las leyes de la casualidad no aplican a estas cuestiones. Si la justicia no siempre decide con buenas razones, no hace mucho uso, como generalmente se supone, del método de Bridoye. Esto quizá es una desgracia, porque, si lo hiciera, el método de Condorcet nos protegería de los malogros de la justicia.

¿Qué significa esto? Estamos tentados a atribuir hechos de esta naturaleza a la casualidad porque sus causas son oscuras, pero esto no es verdadera casualidad. Las causas nos son desconocidas, es cierto, y tal vez hasta son complejas; pero no son lo suficientemente complejas, ya que preservan algo, y ya hemos visto que esta es la marca distintiva de las causas “demasiado simples”. Cuando los hombres se juntan, ya no deciden por casualidad e independientemente unos de otros, sino que reaccionan unos sobre otros. Muchas causas entran en acción, atormentan a los hombres y los hacen ir por tal o cual lado, pero hay una cosa que no pueden destruir, a saber, y como las ovejas de Panurge, los hábitos que tienen. Y es esto lo que se conserva.

X

La aplicación del cálculo de probabilidades a las ciencias exactas también supone muchas dificultades. ¿Por qué los decimales de una tabla de logaritmos o del número π están distribuidos en concordancia con las leyes de la casualidad? En otra parte he estudiado la cuestión con respecto a los logaritmos, y ahí la cuestión es fácil. Es claro que una pequeña diferencia en el argumento dará una pequeña diferencia en el logaritmo, pero una gran diferencia en el sexto decimal del logaritmo. Encontramos, pues, el mismo criterio.

Pero en cuanto al número π se refiere, la cuestión presenta más dificultades, y por el momento no tengo una explicación satisfactoria que ofrecer.

Hay muchas otras cuestiones que podrían surgir, si desease abordarlas antes de responder la cuestión que especialmente me he propuesto. Cuando llegamos a un resultado simple, cuando, por ejemplo, encontramos un número redondo, decimos que tal resultado no puede deberse a la casualidad, y buscamos una causa no fortuita para explicarlo. Y, en realidad, sólo hay una probabilidad muy pequeña de que, de 10,000 números, nos toque un número redondo, el número 10,000, por ejemplo; solamente hay una probabilidad en 10,000. Pero tampoco hay más que una probabilidad en 10,000 de que nos toque otro número en particular y, sin embargo, este resultado no nos asombra, y no dudamos en atribuirlo a la casualidad, y eso sólo porque es menos llamativo.

¿Es esto una simple ilusión de nuestra parte, o hay casos en donde este punto de vista es legítimo? Debemos esperar que así sea, porque de otra forma toda ciencia sería imposible. Cuando queremos verificar una hipótesis, ¿qué es lo que hacemos? No podemos verificar todas sus consecuencias, porque son infinitas en número. Nos contentamos con verificar unas cuantas y, si tenemos éxito, declaramos que la hipótesis está confirmada, ya que tanto éxito no podría deberse a la casualidad. En el fondo, siempre está el mismo razonamiento.

No puedo justificar lo anterior completamente porque me llevaría mucho tiempo, pero sí puedo decir por lo menos esto. Nos encontramos frente a dos hipótesis, ya sea una causa simple, o bien tal agregado de causas complejas que llamamos casualidad. Encontramos natural admitir que la primera debe producir un resultado simple y que, si llegamos a éste, al número redondo por ejemplo, pensamos más razonable atribuirlo a la causa simple, que era casi seguro que nos daría tal resultado, que a la casualidad, que sólo nos lo podría dar una en 10,000 veces. No sería lo mismo si llegásemos a un resultado que no es simple. Es cierto que la casualidad no podría dárnoslo en más de una ocasión sobre 10,000, pero la causa simple tampoco podría hacerlo.

PARTE II

RAZONAMIENTO MATEMÁTICO

CAPÍTULO I

LA RELATIVIDAD DEL ESPACIO

I

Es imposible imaginar un espacio vacío. Todos nuestros esfuerzos dedicados a imaginar un espacio puro en el cual estén excluidas las cambiantes imágenes de los objetos materiales sólo pueden resultar en una representación en donde superficies muy coloreadas, por ejemplo, sean remplazadas por líneas de menor coloración, y si continuamos en esta dirección hasta el final, todo desaparecería y acabaríamos con nada. De ahí surge la irreductible relatividad del espacio.

Quien quiera que hable de un espacio absoluto utiliza palabras carentes de sentido. Esta es una verdad que ha sido proclamada por mucho tiempo por todos aquellos que han reflexionado sobre la cuestión, pero a veces tendemos a olvidarla.

Si me encuentro en un punto definido en París, en el *Place du Panthéon*, por ejemplo, y digo: “Volveré *aquí* mañana”, y se me pregunta: “¿Quieres decir que mañana volverás al mismo punto en el espacio?”, estaré tentado a responder que sí. Pero estaré equivocado, porque entre ahora y mañana la Tierra se habrá movido, llevando con ella al *Place du Panthéon*, que habrá recorrido más de un millón de kilómetros. Y no ganaría nada hablando con mayor precisión, porque este millón de kilómetros ha sido cubierto por nuestro globo en su movimiento con relación al Sol, y el Sol, a su vez, se mueve en relación con la Vía Láctea, y la Vía Láctea sin duda se encuentra en movimiento sin que podamos identificar su velocidad. De tal suerte que somos, y siempre seremos, completamente ignorantes de cuánto se mueve el *Place du Panthéon*

en un día. En realidad, lo que quise decir fue: “Mañana observaré una vez más el domo y el frontón del *Panthéon*”, y si no hubiese *Panthéon* mi frase no tendría sentido y el espacio desaparecería.

Esta es una de las formas más comunes del principio de la relatividad del espacio, pero existe otra sobre la que Delbouf[9] ha puesto un énfasis especial. Supongamos que una noche todas las dimensiones del Universo se vuelven mil veces más grandes. El mundo permanecería *similar* a sí mismo, si damos a la palabra *similitud* el significado que tiene en el tercer libro de Euclides. Sólo que, lo que antes era un metro ahora medirá un kilómetro, y lo que antes era un milímetro, ahora será un metro. La cama en la que nos fuimos a dormir, y nuestro propio cuerpo, habrán crecido en la misma proporción. Cuando nos despertemos, ¿cuál será nuestra sensación en vista de tal asombrosa transformación? Bien, no notaremos nada en absoluto. Las medidas más exactas serán incapaces de revelar algo sobre este tremendo cambio, ya que las medidas que utilizamos habrán variado exactamente en las mismas proporciones que los objetos que intentamos medir. En realidad, el cambio solamente existe para aquellos que argumentan que el espacio es absoluto. Si argumenté por un momento como ellos, sólo fue para hacer aún más evidente que su punto de vista implica una contradicción. En verdad, sería mejor decir que, como el espacio es relativo, nada ha sucedido, y es por eso que no hemos notado nada.

¿Tenemos entonces algún derecho para decir que conocemos la distancia entre dos puntos? No, porque la distancia puede experimentar enormes variaciones sin que seamos capaces de percibirlas, siempre que otras distancias varíen en las mismas proporciones. Justo ahora vimos que el decir que estaremos aquí mañana no significa que estaremos en el punto en el espacio en donde nos encontramos hoy, sino que mañana estaremos a la misma distancia del *Panthéon* de la que nos encontramos hoy. Y ya esta declaración no es suficiente, y debemos decir que mañana y hoy nuestra distancia con respecto al *Panthéon* será igual al mismo número de veces que la longitud de nuestro cuerpo.

Pero eso no es todo. Acabamos de imaginar que las dimensiones del mundo cambian, pero que - por lo menos - el mundo permanece similar a sí mismo. Podemos ir mucho más allá de lo anterior, y una de las teorías más sorprendentes de la física moderna nos permite hacerlo. De acuerdo con una hipótesis desarrollada por Lorentz y

[9] Poincaré se refiere a Joseph Delboeuf (1831-1896), matemático y filósofo belga. Nota del Traductor.

Fitzgerald,[10] todos los cuerpos transportados en el movimiento de la Tierra experimentan una deformación. Esta deformación es, en realidad, muy leve, ya que todas las dimensiones paralelas al movimiento terrestre disminuyen una centésima de millón[11], mientras que las dimensiones perpendiculares a este movimiento no se ven alteradas. Pero importa poco que [esta deformación] sea leve; es suficiente con que exista para la conclusión que en breve haremos. Además, aunque dije que es leve, en realidad no sé nada sobre ella. He sido víctima de la tenaz ilusión que nos hace pensar en un espacio absoluto. Estaba pensando en el movimiento de la Tierra sobre su órbita elíptica alrededor del Sol, y concedí que su velocidad era de 18 millas por segundo. Pero su velocidad real (esta vez me refiero, no a su velocidad absoluta, que no tiene sentido, sino a su velocidad en relación con el éter) no la conozco, y no tengo medios para hacerlo. Es, quizá, 10 o 100 veces mayor, y entonces la deformación es, a su vez, 100 o 10,000 veces mayor.

Es claro que no podemos demostrar esta deformación. Consideremos un cubo cuyos lados miden un metro de largo. Este cubo se deforma debido a la velocidad de la Tierra; uno de sus lados, aquel paralelo al movimiento, se vuelve más pequeño, mientras que los otros no varían. Si quisiésemos asegurarnos de lo anterior con la ayuda de una medida, mediríamos primero uno de los lados perpendiculares al movimiento, y felizmente encontraríamos que nuestra medida se ajusta exactamente a este lado. En realidad, ninguna de estas longitudes se ve alterada, ya que ambas son perpendiculares al movimiento. Después deseamos medir el otro lado, aquel paralelo al movimiento; para este propósito, cambiamos la posición de nuestra medida para que pueda aplicarse a este lado. Pero la medida, habiendo cambiado su dirección y habiéndose vuelto paralela con el movimiento, ha sufrido también una deformación, de tal manera que, aunque el lado ya no mide un metro, se ajustará de manera exacta a tal medida, y no nos percataremos de nada.

Me pregunto, ¿cuál es entonces el uso de la hipótesis de Lorentz y Fitzgerald si ningún experimento nos permite comprobarla? La verdad es que mi exposición es incompleta. Solamente he hablado de mediciones que pueden hacerse con la ayuda de un instrumento de medición, pero también podemos medir una distancia por el tiempo que toma a la luz atravesarla, con la condición de que admitamos que la velocidad de la luz es constante, e independiente de su dirección. Lorentz pudo haber dado cuenta de

[10] *Vide infra*, libro III, cap. II.

[11] Esto es, 1.0×10^{-8}, o 0.0000001. Nota del Traductor.

estos hechos al suponer que la velocidad de la luz es mayor en la dirección del movimiento de la Tierra que en la dirección perpendicular. Prefirió admitir que la velocidad es la misma en ambas direcciones, pero que los cuerpos son más pequeños en la primera [dirección] que en la segunda. Si las superficies de las ondas de la luz hubiesen experimentado las mismas deformaciones que los cuerpos materiales, nunca habríamos percibido la deformación de Lorentz-Fitzgerald.

Tanto en un caso como en el otro, no puede haber cuestión alguna relativa a una magnitud absoluta, sino sólo sobre la medición de tal magnitud por medio de algún instrumento. Este instrumento puede ser un metro o el camino atravesado por la luz. Únicamente medimos la relación de la magnitud con el instrumento, y si esta relación se altera, carecemos de medio alguno para saber si lo que ha cambiado es la magnitud o el instrumento.

Pero lo que quiero dejar claro es que, en esta deformación, el mundo no ha permanecido similar a sí mismo. Los cuadrados se han vuelto rectángulos o paralelogramos, los círculos elipses, y las esferas elipsoides. Y aún con todo esto, no tenemos medio alguno para saber si la deformación es real.

Es evidente que podemos ir mucho más lejos. En lugar de la deformación de Lorentz-Fitzgerald, con sus leyes extremadamente simples, podemos imaginar una deformación de cualquier tipo; los cuerpos pueden deformarse de acuerdo con cualesquiera leyes, tan complejas como queramos, y no lo percibiríamos (siempre que todos los cuerpos, sin excepción, se deformasen de acuerdo con las mismas leyes). Cuando digo que todos los cuerpos sin excepción, incluyo, desde luego, a nuestros propios cuerpos y a los rayos de luz emanados de los distintos objetos.

Si observamos al mundo con uno de aquellos espejos de compleja forma que deforman los objetos en una manera ciertamente extraña, no se verían alteradas las mutuas relaciones de las distintas partes del mundo; en realidad, si dos objetos reales se tocan, de igual forma sus imágenes parecerán estar en contacto. Es cierto que cuando miramos a través de tales espejos inmediatamente percibimos la deformación, pero eso es sólo porque el mundo real existe independientemente de esta imagen deformada. E incluso si este mundo real estuviese oculto para nosotros, hay algo que no puede ocultarse, y eso somos nosotros mismos. No podemos dejar de ver, o por lo menos sentir, a nuestro cuerpo y a nuestros miembros que no han sido deformados, y que continúan actuando como instrumentos de medición. Pero si imaginamos que nuestro

propio cuerpo se deforma, estos instrumentos de medición nos fallarán, y será imposible comprobar tal deformación.

Imaginemos, de la misma manera, dos universos que son la imagen uno del otro. A cada objeto *P* en el universo *A* corresponde, en el universo *B*, un objeto P^1 que es su imagen. Las coordenadas de esta imagen P^1 son funciones determinadas de aquellas [coordenadas] del objeto *P*; más aún, estas funciones pueden ser de cualquier tipo, siempre que sean elegidas de una vez por todas. Entre la posición de *P* y de P^1 hay una relación constante, y poco importa qué relación sea, es suficiente con que sea constante.

Pues bien, estos dos universos serían indistinguibles. Quiero decir que el primero sería para sus habitantes lo que el segundo es para los suyos. Esto será cierto siempre que ambos universos permanezcan ajenos el uno al otro. Supongamos que nosotros somos habitantes del universo *A*, y hemos construido nuestra ciencia y, particularmente, nuestra geometría. Durante este tiempo, los habitantes del universo *B* también han construido una ciencia, y como su mundo es la imagen del nuestro, su geometría también será la imagen de la nuestra o, más preciso aún, será la misma. Pero si un día se nos abre una ventana hacia el universo *B*, sentiríamos desprecio por ellos, y tal vez diríamos: “Estas miserables personas imaginaron haber construido una geometría, pero lo que llaman tal cosa es sólo una grotesca imagen de la nuestra; sus líneas rectas están todas retorcidas, sus círculos están corcovados, y sus esferas tienen caprichosas desigualdades”. No tendríamos sospecha alguna de que ellos dirían lo mismo de nosotros, y que ninguno sabría nunca quién tiene razón.

Podemos ver en qué sentido tan amplio debemos entender la relatividad del espacio. El espacio es en realidad amorfo, y sólo las cosas que hay en él le dan una forma. ¿Qué debemos pensar, entonces, de aquella intuición directa que tenemos de una línea recta o de una distancia? Tenemos tan poca intuición de la distancia que, en una sola noche, tal como hemos dicho, una distancia puede volverse mil veces mayor sin que seamos capaces de percibirlo, si todas las distancias han experimentado la misma alteración. Y en una noche el universo *B* podría ser sustituido por el universo *A* sin que tengamos medio alguno para saberlo, y entonces las líneas rectas de ayer dejarán de ser rectas, y no nos habremos dado cuenta de nada.

Una parte del espacio no es por sí misma y en el sentido absoluto de la palabra igual a otra parte del espacio, porque si así lo es para nosotros, no lo será para los

habitantes del universo *B*, y ellos tienen tanto derecho para rechazar nuestra opinión como nosotros tenemos de condenar la suya.

En otra parte he mostrado cuáles son las consecuencias de estos hechos desde el punto de vista de la idea de que debemos construir geometrías no euclidianas y otras análogas. No quiero regresar a esto, y adoptaré un punto de vista algo distinto.

II

Si esta intuición de la distancia, de la dirección, de la línea recta, si esta intuición directa, pues, del espacio no existe, ¿de dónde viene que imaginamos tenerla? Si esto es sólo una ilusión, ¿de dónde viene que esta ilusión sea tan tenaz? Esto es lo que debemos examinar. No existe una intuición directa de la magnitud, como ya hemos visto, y únicamente podemos llegar a la relación de magnitud gracias a nuestros instrumentos de medición. De acuerdo con lo anterior, no hubiésemos podido construir al espacio si careciésemos de un instrumento para medirlo. Pues bien, tal instrumento al que referimos todo y del que hacemos uso de manera instintiva, es nuestro propio cuerpo. Es con referencia a nuestro propio cuerpo que ubicamos los objetos exteriores, y las únicas relaciones especiales que podemos imaginar de estos objetos con nosotros mismos son las relaciones con nuestro cuerpo. Es nuestro cuerpo el que sirve, por así decirlo, como un sistema de ejes de coordenadas.

Por ejemplo, en un momento α la presencia de un objeto *A* nos es revelada a través del sentido de la vista; en otro momento β la presencia de otro objeto *B* nos es revelada por otro sentido, por ejemplo, por el del oído o el del tacto, y resolvemos que este objeto *B* ocupa el mismo lugar que el objeto *A*. ¿Qué significa esto? Para empezar, lo anterior no implica que estos dos objetos ocupen, en dos momentos distintos, el mismo punto en un espacio absoluto que, incluso si existiese, no lo podríamos conocer, ya que entre los momentos α y β el Sistema Solar se ha desplazado de tal suerte que no podemos conocer qué tanto. Significa, más bien, que estos dos objetos ocupan la misma posición relativa con respecto a nuestro cuerpo.

¿Pero qué significa incluso esto? Las impresiones que provienen de estos objetos han seguido caminos absolutamente distintos (el nervio óptico para el objeto *A*, y el nervio acústico para el objeto *B*); desde un punto de vista cualitativo, no tienen nada en común. Las representaciones que podemos formarnos de estos dos objetos son absolutamente heterogéneas e irreductibles una a la otra. Sólo sabemos que, para

alcanzar al objeto *A*, únicamente necesitamos extender nuestro brazo derecho de cierta manera; incluso si nos abstuviésemos de hacerlo, nos podemos representar las sensaciones musculares y otras análogas que acompañan tal extensión, y tal representación está asociada con la del objeto *A*.

Sabemos igualmente que podemos alcanzar al objeto *B* al extender nuestro brazo derecho de la misma forma, una extensión, pues, acompañada por la misma serie de sensaciones musculares. Y no me refiero a nada más que a esto cuando digo que estos dos objetos ocupan la misma posición.

También sabemos que pudimos haber alcanzado al objeto *A* por otro movimiento apropiado del brazo izquierdo, y nos representamos las sensaciones musculares que hubiesen acompañado a tal movimiento. Y, por el mismo movimiento del brazo izquierdo, acompañado, de nuevo, por las mismas sensaciones, pudimos, igualmente bien, haber alcanzado al objeto *B*.

Y esto es muy importante, ya que es de esta forma como nos podemos defender de las amenazas del objeto *A* o del objeto *B*. A cada uno de los ataques que pueden golpearnos, la naturaleza ha asociado una o varias obstrucciones que nos permiten protegernos de ellos. La misma obstrucción puede responder a varios golpes y es así, por ejemplo, que el mismo movimiento del brazo derecho nos hubiese permitido defendernos, en el momento α, en contra del objeto *A*, y en el momento β en contra del objeto *B*. De manera similar, el mismo golpe puede ser obstruido de varias formas, y hemos dicho, por ejemplo, que pudimos haber alcanzado, igualmente bien, al objeto *A* ya sea por un cierto movimiento del brazo derecho, o por un cierto movimiento del izquierdo.

Todas estas obstrucciones no tienen nada en común una con otra, salvo que nos permiten evitar el mismo golpe, y es sólo eso, y nada más que eso, lo que queremos significar cuando decimos que son movimientos que terminan en el mismo punto en el espacio. De igual forma, estos objetos, los cuales ya dijimos que ocupan la misma posición en el espacio, no tienen nada en común, excepto que la misma obstrucción nos permite defendernos de ellos.

O, si así lo preferimos, imaginemos una serie de innumerables cables telegráficos, algunos centrípetos y otros centrífugos. Los cables centrípetos nos advierten de accidentes que ocurren en el exterior, mientras que los centrífugos nos proveen el remedio. Las conexiones están hechas de tal suerte que cuando una corriente atraviesa por uno de los cables centrípetos, ésta actúa sobre un centro de intercambio, y

excita así a una corriente en uno de los cables centrífugos, y las cosas están arregladas de tal forma que varios cables centrípetos pueden actuar sobre el mismo cable centrífugo si el mismo remedio es aplicable a varios males, y un cable centrípeto puede perturbar varios cables centrífugos, ya sea de manera simultánea o uno a falta de otro cada vez que el mismo mal pueda ser curado por varios remedios.

Este complejo sistema de asociaciones, este tablero de distribución - por así llamarle - es toda nuestra geometría, o, si se prefiere, todo lo que es distintivo en nuestra geometría. Lo que llamamos nuestra intuición de una línea recta o de la distancia es la consciencia que tenemos de estas asociaciones y de su imperioso carácter.

Es fácil dilucidar de dónde proviene este imperioso carácter. Cuanto más vieja es una asociación, más indestructible nos parecerá. Pero estas asociaciones no son, en su mayoría, conquistas hechas por el individuo - ya que vemos rastros de ellas en los infantes recién nacidos -, sino conquistas hechas por la especie. Cuanto más necesarias resultasen ser estas conquistas, más rápido deben haber sido reproducidas por la selección natural.

Considerando esto, aquellos de los que hemos estado hablando deben haber sido de los primeros [en desarrollar todas las características anteriores], ya que sin ellos la defensa del organismo resultaría imposible. Tan pronto como las células ya no estuvieron simplemente yuxtapuestas, tan pronto como fueron requeridas para asistirse unas con otras, tal organismo que hemos descrito necesariamente tuvo que haberse organizado para que la asistencia se enfrentara al peligro sin fracasar.

Cuando se corta la cabeza a una rana, y se pone una gota de ácido sobre algún punto de su piel, la rana intenta remover el ácido con la pata más cercana; y si tal pata es cortada, lo remueve con la otra. Aquí tenemos, claramente, aquella doble obstrucción sobre la que recién hablé, que hace posible oponerse a un mal a partir de un segundo remedio si el primero falla. Es esta multiplicidad de obstrucciones, y la coordinación resultante, lo que llamamos espacio.

Vemos hasta qué profundidades del inconsciente debemos descender para encontrar los primeros rastros de estas asociaciones espaciales, ya que entran en juego las partes más bajas del sistema nervioso. Una vez conscientes de esto, ¿cómo podemos sorprendernos de la resistencia que oponemos a cualquier intento de desasociar lo asociado por tanto tiempo? Es, pues, esta misma resistencia lo que llamamos la evidencia de las verdades de la geometría. Esta evidencia no es otra cosa que la

repugnancia que sentimos al quebrantar hábitos sumamente añejos y con los que siempre nos hemos llevado muy bien.

III

El espacio así creado es sólo un pequeño espacio que no se extiende más allá de lo que nuestro brazo puede alcanzar, y la intervención de la memoria es necesaria para hacer retroceder sus límites. Existen puntos que siempre quedarán fuera de nuestro alcance, sin importar qué esfuerzos hagamos para alcanzarlos. Si estuviésemos atados al suelo como un pólipo de mar que sólo puede extender sus tentáculos, por ejemplo, todos estos puntos estarían fuera del espacio, ya que las sensaciones que podríamos experimentar por la acción de los cuerpos puestos ahí no estarían asociadas con la idea de movimiento alguno que nos permitiese alcanzarlos, ni con obstrucción apropiada alguna. Nos parecería que estas sensaciones no tienen carácter espacial alguno, y ni siquiera intentaríamos ubicarlas.

Pero no estamos atados al suelo como los animales inferiores. Si el enemigo se encuentra muy lejos, podemos avanzar hacia él y extender nuestra mano cuando estemos lo suficientemente cerca. Esto es también una obstrucción, aunque sea una de larga distancia. Por otra parte, es una obstrucción compleja, y en la representación que hacemos de ella entra la representación de las sensaciones musculares causadas por el movimiento de las piernas, la de las sensaciones musculares causadas por el movimiento último del brazo, la de las sensaciones de los canales semicirculares, etc. Además, debemos hacernos una representación, no de un complejo de sensaciones simultáneas, sino de un complejo de sensaciones sucesivas, siguiéndose una a otra en un orden determinado. Es por esto que antes dije que la intervención de la memoria es necesaria.

Debemos observar además que, para alcanzar el mismo punto, nos podemos aproximar aún más al objeto a ser alcanzado para no tener que extender tanto nuestra mano. ¿Y qué tanto más?, podría preguntarse. No es sólo una, sino un millar de obstrucciones las que podemos oponer al mismo peligro. Todas estas obstrucciones están formadas por sensaciones que pueden no tener nada en común, y no obstante las consideramos como definiendo el mismo punto en el espacio porque son capaces de responder al mismo peligro y están todas y cada una de ellas asociadas a la noción de éste. Es esta posibilidad de obstruir el mismo peligro la que une a estas distintas

obstrucciones, así como, en la misma forma, es la posibilidad de ser obstruido la que une peligros tan distintos que pueden amenazarnos desde el mismo punto en el espacio. Es esta doble unidad la que conforma la individualidad de cada punto en el espacio, y en la noción de cada punto no hay nada más que esto.

El espacio que describí en la sección precedente, y que podríamos llamar *espacio restringido*, se refería a ejes de coordenadas unidos a nuestro cuerpo. Estos ejes se encontraban fijos, ya que nuestro cuerpo no se movía, y sólo cambiaban de posición nuestros miembros. ¿Qué son estos ejes, a los que el *espacio extendido* se refiere (esto es, el nuevo espacio que acabo de definir)?[12] Definimos un punto por la sucesión de movimientos requeridos para alcanzarlo, empezando desde una cierta posición inicial del cuerpo. Los ejes, por consiguiente, están unidos a esta posición inicial del cuerpo.

Pero la posición que llamo inicial puede ser arbitrariamente escogida de entre todas las posiciones que nuestro cuerpo ha ocupado de manera sucesiva. Si es necesaria una memoria más o menos inconsciente de estas sucesivas posiciones para la génesis de la noción del espacio, esta memoria puede recurrir al pasado. De esto resulta una cierta indeterminación de la misma definición del espacio, y es precisamente esta indeterminación la que constituye su relatividad.

El espacio absoluto ya no existe más; únicamente existe un espacio relativo a cierta posición inicial del cuerpo. Para un ser consciente, fijado al suelo como los animales inferiores y quien consecuentemente sólo conocería un espacio restringido, el espacio también sería relativo, ya que éste se referiría a su cuerpo, aun cuando este ser no sería consciente de tal relatividad porque los ejes a los que refiere este espacio restringido no cambiarían. Sin duda la roca a la que este ser estuviese encadenado no sería inmóvil, ya que tomaría parte en el movimiento de nuestro planeta; para nosotros, consecuentemente, cambiarían a cada momento, pero para él no. Tenemos la facultad de referir nuestro espacio extendido, en un momento, a la posición *A* de nuestro cuerpo considerada como inicial, y en otro momento a la posición *B* ocupada unos momentos más tarde, y a la que somos libres de considerar, a su vez, como [posición] inicial. De acuerdo con esto, a cada momento hacemos cambios inconscientes en las coordenadas. Nuestro ser imaginario no tendría esta facultad y, por nunca haberse desplazado, pensaría que el espacio es absoluto. A cada momento su sistema de ejes se impondría sobre él; este sistema puede cambiar a cualquier extensión en la realidad, pero para él

[12] Poincaré habla aquí del espacio en el que los cuerpos tienen movimiento. Nota del Traductor.

siempre sería el mismo, ya que siempre sería el *único* sistema. No es lo mismo para nosotros que poseemos, a cada momento, varios sistemas de entre los cuales podemos elegir a voluntad, sobre la condición de recordar.

Esto no es todo. El espacio restringido tampoco sería homogéneo. Los distintos puntos de este espacio no podrían ser considerados como equivalentes, ya que algunos sólo podrían alcanzarse a partir de grandes esfuerzos, mientras que otros podrían alcanzarse fácilmente. Por el contrario, nuestro espacio extendido nos parece homogéneo, y decimos que todos sus puntos son equivalentes. ¿Qué significa todo esto?

Si partimos desde una cierta posición *A* podemos realizar ciertos movimientos *M*, caracterizados por un determinado complejo de sensaciones musculares. Pero, partiendo desde otra posición *B*, podemos ejecutar movimientos M^1 caracterizados por las mismas sensaciones musculares. Sea *a* la situación de un cierto punto en el cuerpo, la punta del dedo índice de la mano derecha, por ejemplo, en la posición inicial *A*, y sea *b* la posición de este mismo dedo índice cuando, partiendo de la posición *A*, hemos realizado los movimientos *M*. Sea entonces a^1 la situación del dedo índice en la posición *B*, y b^1 su situación cuando, partiendo de la posición *B*, realizamos los movimientos M^1.

Pues bien, estoy en posición de decir que los puntos *a* y *b* son, en relación uno con otro, como los puntos a^1 y b^1, y esto simplemente significa que las dos series de movimientos *M* y M^1 están acompañadas por las mismas sensaciones musculares. Y como soy consciente de que, al pasar de la posición *A* a la posición *B*, mi cuerpo ha seguido siendo capaz de hacer los mismos movimientos, sé que hay un punto en el espacio que es al punto a^1 lo que algún punto *b* es al punto *a*, de tal forma que los dos puntos *a* y a^1 son equivalentes. A esto se le llama la homogeneidad del espacio y, al mismo tiempo, es por esta razón que el espacio es relativo, ya que sus propiedades continúan siendo las mismas ya sea que se refieran a los ejes *A* o *B*. Así que la relatividad del espacio y su homogeneidad son una y la misma cosa.

Ahora bien, si quisiese pasar al gran espacio, que ya no sólo es fructífero para mi uso individual, sino por el cual puedo representar el Universo, tendría que imaginármelo. Podría imaginar qué experimenta un gigante capaz de alcanzar los planetas con unos pocos pasos o, si se prefiere, qué sentiría ante la presencia de un mundo en miniatura, en donde estos planetas sean remplazados por pequeñas pelotas en una de las cuales viva y se mueva un liliputiense que no sería otro sino yo. Pero este

acto de imaginación me resultaría imposible si antes no hubiese construido mi espacio restringido y mi espacio extendido para un uso personal.

IV

Llegamos ahora a la cuestión de por qué todos estos espacios tienen tres dimensiones. Refirámonos de nuevo al "tablero de distribución" ya descrito antes. Tenemos, por un lado, una lista de los distintos posibles peligros (a los que designaremos como *A1*, *A2*, etc.) y, por el otro, la lista de los distintos remedios, a los que llamaremos, de igual forma, *B1*, *B2*, etc. Después tenemos las conexiones entre los botones de contacto de la primera lista y aquellos de la segunda, de tal suerte que cuando se activa la alarma para el peligro *A3*, por ejemplo, pone en movimiento - o puede poner en movimiento - el relé correspondiente a la obstrucción *B4*.

Temo que todo lo que dije antes sobre los cables centrípetos o centrífugos pueda ser tomado no como una simple comparación, sino como una descripción del sistema nervioso. Esa no es mi intención, y no lo es por varias razones. Primero, no me atrevería a proferir una opinión sobre el sistema nervioso que no conozco, siendo además que aquellos que sí lo conocen siempre hablan de él con prudencia. Segundo porque, a pesar de mi incompetencia, me doy perfectamente cuenta de que este esquema sería demasiado simple. Y último porque, en mi lista de obstrucciones, aparecen algunas que resultan demasiado complejas, y que incluso pueden consistir - en el caso del espacio extendido, como ya vimos arriba - en varios pasos seguidos por un movimiento del brazo. No se trata, pues, de una conexión física entre dos conductores reales, sino de una asociación psicológica entre dos series de sensaciones.

Si *A1* y *A2*, por ejemplo, están ambas asociadas con la obstrucción *B1*, y si *A1* está de igual manera asociada con *B2*, por lo general será el caso que *A2* y *B2* también estén asociadas. Si esta ley fundamental no fuese por lo general cierta, entonces sólo habría una confusión inmensa, y no habría nada que pudiese guardar alguna semejanza con una concepción del espacio o con una geometría. ¿Cómo es que, en efecto, hemos definido un punto en el espacio? Lo hemos definido de dos formas: por una parte, constituye la totalidad de las alarmas *A* que se encuentran en conexión con la misma obstrucción *B*; por otra, constituye la totalidad de las obstrucciones *B* que se encuentran en conexión con la misma alarma *A*. Si nuestra ley no fuese cierta, nos veríamos obligados a decir que *A1* y *A2* corresponden al mismo punto, ya que ambas están en

conexión con *B1*; pero igualmente estaríamos obligados a decir que no corresponden al mismo punto, ya que *A1* estaría en conexión con *B2*, y esto no sería cierto para *A2*, lo cual supone una contradicción.

Pero, visto desde otra perspectiva, si esta ley fuese rigurosa e invariablemente cierta, el espacio sería muy diferente a lo que es. Tendríamos categorías bien definidas, entre las cuales estarían repartidas, por un lado, las alarmas *A*, y por el otro las obstrucciones *B*. Estas categorías serían excesivamente numerosas, aunque estarían completamente separadas unas de otras. El espacio estaría formado por puntos muy numerosos pero discretos, y sería, por tanto, *discontinuo*. No habría razón alguna para acomodar estos puntos en un orden en lugar de otro, ni para, consecuentemente, atribuir tres dimensiones al espacio.

Pero este no es el caso. Si se me permite, haré uso, por un momento, del lenguaje de aquellos ya familiarizados con la geometría. Es necesario que así lo haga, ya que es el lenguaje mejor comprendido por aquellos a los que deseo aclarar mis puntos. Cuando deseamos obstruir un golpe, intentamos alcanzar el punto de donde proviene, y es suficiente con que nos acerquemos lo necesario para tal propósito. Entonces la obstrucción *B1* puede responder a *A1* y a *A2* si el punto que corresponde a *B1* se encuentra lo suficientemente cerca de aquellos que corresponden tanto a *A1* como a *A2*. Pero bien puede suceder que el punto que corresponde a otra obstrucción *B2* esté lo suficientemente cerca del punto correspondiente a *A1*, y no lo suficientemente cerca del punto correspondiente a *A2*. Así, la obstrucción *B2* puede responder a *A1* y no ser capaz de responder a *A2*.

Para aquellos que aún no saben geometría, lo anterior puede ser traducido simplemente al modificar la ley anunciada arriba. Entonces lo que sucede es lo siguiente. Dos obstrucciones, *B1* y *B2*, están asociadas con una alarma *A1* y con un gran número de alarmas que pondremos en la misma categoría que *A1*, y que haremos corresponder con el mismo punto en el espacio. Pero podemos encontrar alarmas *A2* que estén asociadas con *B2* pero no con *B1* y que, por otra parte, estén asociadas con *B3* y no con *A1*, y así sucesivamente, de tal suerte que podemos escribir la siguiente secuencia

$$B1, A1, B2, A2, B3, A3, B4, A4$$

en donde cada término está asociado con los términos subsiguientes y precedentes, pero no con aquellos que se encuentran retirados varios lugares.

No es necesario añadir que cada uno de los términos de estas secuencias no está aislado, sino que forma parte de una categoría muy numerosa de otras alarmas o de otras obstrucciones que tiene las mismas conexiones que él, y que puede ser considerada como perteneciente al mismo punto en el espacio. De esta forma, la ley fundamental, aunque admita excepciones, continúa siendo casi siempre cierta. Sólo que, como consecuencia de estas excepciones, estas categorías, en lugar de estar completamente separadas, se invaden parcialmente unas con otras y, hasta cierto punto, saltan mutuamente unas por encima de otras, de tal suerte que el espacio se vuelve continuo.

Además, el orden en el que deben acomodarse estas categorías ya no es arbitrario, y una referencia a la secuencia precedente evidenciará que *B2* debe ser puesto entre *A1* y *A2* y, consecuentemente, entre *B1* y *B3*, y que no puede ser puesto, por ejemplo, entre *B3* y *B4*.

De acuerdo con lo anterior, existe un orden en el que nuestras categorías se acomodan por sí mismas de manera natural, y que corresponde a los puntos en el espacio. La experiencia nos enseña que este orden se presenta en la forma de un tablero de distribución de tres circuitos, y es por esta razón por la que el espacio tiene tres dimensiones.

V

Así, la propiedad característica del espacio - la de tener tres dimensiones - es sólo una propiedad de nuestro tablero de distribución, una que reside, por así decirlo, en la inteligencia humana. La destrucción de alguna de estas conexiones, esto es, de estas asociaciones de ideas, resultaría suficiente para proporcionarnos un tablero de distribución distinto, y puede ser necesaria para dotar al espacio de una cuarta dimensión.

Algunas personas quedarían perplejas ante tal resultado. El mundo exterior, piensan ellos, sin duda debe contar para algo. Si el número de dimensiones proviene de la forma en la que estamos hechos, podría haber seres pensantes viviendo en nuestro mundo, pero hechos de manera distinta a nosotros, que piensen que el espacio tiene más o menos de tres dimensiones. ¿No ha dicho el señor de Cyon que los ratones japoneses, al tener únicamente dos pares de canales semicirculares, piensan que el espacio tiene dos dimensiones? ¿Entonces no podrá este ser pensante, si fuese capaz de construir un sistema físico, hacer un sistema de dos o cuatro dimensiones que aún así sería, en un

sentido, el mismo que el de nosotros, ya que describiría el mismo mundo sólo que en otro lenguaje?

Parece ser, en efecto, que sería posible traducir nuestra física al lenguaje de la geometría de cuatro dimensiones. Intentar tal traducción equivaldría a esforzarse demasiado por una recompensa menor, y me contentaré con mencionar la mecánica de Hertz, en donde se puede ver algo parecido. Sin embargo, parece que la traducción siempre sería menos simple que el texto, y que nunca perdería la apariencia de una traducción, ya que el lenguaje tridimensional es el que mejor encaja con la descripción de nuestro mundo, aun cuando tal descripción pueda hacerse, en caso de necesidad, en otro idioma.

Por otra parte, la formación de nuestro tablero de distribución no se debe a la casualidad. Existe una conexión entre la alarma *A1* y la obstrucción *B1*, es decir, una propiedad que reside en nuestra inteligencia. ¿Pero por qué existe esta conexión? Es porque la obstrucción *B1* nos permite defendernos contra el peligro que supone *A1*, y ese es un hecho externo a nosotros, una propiedad, pues, del mundo exterior. Nuestro tablero de distribución es, entonces, solamente la traducción de una colección de hechos exteriores, y si tiene tres dimensiones es porque se ha adaptado a un mundo con ciertas propiedades, y la más importante de éstas es que existen sólidos naturales claramente desplazados de acuerdo con las leyes que llamamos leyes del movimiento de los sólidos invariables. No debe sorprendernos, pues, que sea el lenguaje de tres dimensiones el que nos permita describir al mundo de la manera más fácil. Este lenguaje está fundado sobre nuestro tablero de distribución, y este tablero se ha establecido para permitirnos vivir en este mundo.

He dicho que podemos concebir seres pensantes, viviendo en nuestro mundo, cuyo tablero de distribución tendría cuatro dimensiones y quienes, consecuentemente, pensarían en términos de un hiperespacio. No resulta cierto, sin embargo, que tales seres, admitiendo que naciesen, serían capaces de vivir y defenderse en contra de los miles de peligros que los asecharían.

VI

Unas pocas observaciones como conclusión. Existe un notable contraste entre la tosquedad de esta geometría primitiva - reducida a lo que hemos llamado tablero de distribución - y la infinita precisión de la geometría matemática. Pero la última es hija

de la primera, y no sólo de ella; requirió ser fertilizada por la facultad que tenemos para construir conceptos matemáticos como el de grupo, por ejemplo. Fue necesario encontrar, entre estos conceptos puros, el que mejor se adaptase a este tosco espacio, cuya génesis he intentado explicar en las páginas precedentes, y el cual es común a nosotros y a los animales superiores.

La evidencia de ciertos postulados geométricos se debe sólo, como ya he dicho, a nuestra indisposición a renunciar a viejos hábitos. Pero estos postulados son infinitamente precisos, mientras que los hábitos tienen sobre ellos algo esencialmente fluente. Tan pronto como nos proponemos pensar, nos vemos obligados a tener postulados infinitamente precisos, ya que este es el único medio para evitar contradicciones. Pero entre todos los posibles sistemas de postulados, hay algunos que no nos veremos dispuestos a adoptar, porque no concuerdan lo suficiente con nuestros hábitos. No obstante qué tan fluidos y elásticos puedan resultar, tienen un límite de elasticidad.

Se verá que, aunque la geometría no es una ciencia experimental, es una ciencia surgida en conexión con la experiencia, y que hemos creado el espacio que estudia, pero adaptándolo al mundo en el que vivimos. Hemos elegido el espacio más conveniente, pero la experiencia ha guiado esta elección. Como esta elección fue inconsciente, parecería que está impuesta sobre nosotros. Algunos dicen que está impuesta debido a la experiencia, y otros que nacemos con nuestro espacio ya confeccionado. Después de las consideraciones precedentes, se verá qué proporción de verdad y de error hay en estas dos opciones.

En esta educación progresiva que ha resultado en la construcción del espacio, es muy difícil determinar cuál es el papel del individuo y cuál el de la especie. ¿Hasta qué punto podría uno de nosotros, transportado desde el nacimiento a un mundo completamente distinto en donde, por ejemplo, existiesen cuerpos desplazados en concordancia con las leyes del movimiento de los sólidos no euclidianos, ser capaz de renunciar al espacio ancestral para construir uno completamente nuevo?

El papel de la especie parece ser el predominante, pero si es a ella a quien debemos este espacio tosco (el espacio fluido del que recién hablé, el espacio de los animales superiores), ¿no es a la experiencia inconsciente del individuo a quien debemos el espacio infinitamente preciso del geómetra? Esta es una cuestión que no tiene una solución sencilla. Mencionaré, no obstante, un hecho que muestra que el espacio legado a nosotros por nuestros ancestros todavía preserva una cierta plasticidad.

Ciertos cazadores aprenden a cazar peces bajo el agua, aun cuando la imagen de éstos sea refractaria; y, más aún, lo hacen instintivamente. De acuerdo con esto, han aprendido a modificar su antiguo instinto de dirección o, si se prefiere, a sustituir, por la asociación *A1*, *B1*, otra asociación *A1*, *B2*, porque la experiencia les ha mostrado que la primera no resulta suficiente.

CAPÍTULO II

DEFINICIONES MATEMÁTICAS Y EDUCACIÓN

1. Debo hablar aquí de definiciones generales en las matemáticas. Por lo menos eso es lo que dice el título del capítulo, pero me será imposible confinarme al tema de manera estricta. No seré capaz de considerar tal tema sin hablar, hasta cierto punto, de otras cuestiones afines, y debo pedir una disculpa si a veces me veo obligado a desviarme un poco del asunto que nos ocupa.

¿Qué es una buena definición? Para el filósofo o el científico, es una definición que aplica a todos los objetos a ser definidos, y solamente a ellos; es aquello que satisface las reglas de la lógica. Pero cuando se trata de educación no es eso, sino más bien aquello que puede ser comprendido por los alumnos.

¿Cómo es que hay tantas mentes incapaces de comprender las matemáticas? ¿No hay algo paradójico en esto? He aquí una ciencia que apela únicamente a los principios fundamentales de la lógica, al principio de contradicción, por ejemplo, a lo que forma - por así decirlo - el esqueleto de nuestro entendimiento, a aquello de lo que no podríamos estar privados sin dejar de pensar. Y, aún con todo, hay personas que encuentran oscura esta ciencia, y en realidad son la mayoría. Que sean incapaces de descubrir es comprensible, pero que no comprendan las demostraciones expuestas a ellos, que permanezcan ciegos ante una luz que para nosotros parece brillar de la manera más pura, eso sí es, en conjunto, milagroso.

Y uno no necesita mucha experiencia para saber que estas ciegas personas no son, de ninguna manera, seres excepcionales. Tenemos aquí un problema de difícil solución, pero que debe atraer la atención de todos aquellos que desean dedicarse a la educación.

¿Qué es el entendimiento? ¿Tiene la palabra el mismo significado para todos? ¿Comprender una demostración consiste en examinar cada uno de los silogismos de los cuales está compuesta, en sucesión, y estar convencidos de que es correcta y se ajusta a las reglas del juego? De la misma forma, ¿comprender una definición consiste

simplemente en reconocer que el significado de todos los términos empleados ya es conocido, y convencerse de que no supone contradicción alguna?

Pues bien, para algunos sí consiste en lo anterior, y cuando han llegado a tal convicción, simplemente responden: sí, comprendo. Pero no para la mayoría. Casi todos suelen ser más exigentes, y quieren saber no sólo si todos los silogismos de una demostración son correctos, sino por qué están unidos en un cierto orden y no en otro. Siempre que tales silogismos les parezcan surgidos del capricho, y no de una inteligencia constantemente consciente del fin a ser alcanzado, piensan no haber comprendido.

Sin duda no están totalmente conscientes de qué requieren y serían incapaces de formular su deseo, pero si no obtienen satisfacción alguna, sienten, aunque sea vagamente, que algo falta. ¿Entonces qué sucede? Al principio, aún perciben las evidencias puestas ante sus ojos, pero como aquellas [evidencias] que preceden están conectadas con las que siguen por un hilo muy tenue, pasan sin dejar rastro alguno en sus cerebros, y son inmediatamente olvidadas; iluminadas por un momento, recaen, en seguida, en una noche eterna. A medida que avanzan, ya ni siquiera verán esta efímera luz, porque los teoremas dependen uno del otro, y aquellos requeridos han sido ya olvidados. Y así es como se vuelven incapaces de comprender las matemáticas.

Esto no siempre es culpa del profesor. A menudo su intelecto, que requiere percibir el hilo conductor, es demasiado perezoso para buscarlo y encontrarlo. Pero para poder ayudarlos, primero debemos comprender a fondo qué es lo que los detiene.

Otros siempre se preguntarán qué uso tiene todo esto. No habrán comprendido nada a menos que encuentren a su alrededor, en la práctica o en la naturaleza, el objeto de tal o cual noción matemática. Bajo cada palabra quieren poner una imagen sensible; la definición debe evocar esta imagen, y en cada paso de la demostración deben verla transformada y evolucionada. Bajo esta condición, solamente entenderán y retendrán lo que hayan comprendido. Pero a menudo se engañan: no escuchan el razonamiento, solamente observan las figuras, y creen haber comprendido cuando solamente han visto.

2. ¡Qué tendencias tan distintas tenemos aquí! ¿Debemos combatirlas, o debemos hacer uso de ellas? Y si deseamos combatirlas, ¿a cuál favoreceremos? ¿Debemos mostrar a aquellos que se contentan con la lógica pura que sólo han visto un lado de la moneda, o debemos decir a aquellos que no se satisfacen fácilmente que lo que requieren no es necesario?

En otras palabras, ¿debemos obligar a los jóvenes a cambiar la naturaleza de sus mentes? Tal intento sería inútil; no poseemos la piedra filosofal que nos permitiría transmutar los metales, confiados a nosotros, en otro tipo. Todo lo que podemos hacer es trabajarlos, acomodándonos a sus propiedades.

Muchos niños a los que no obstante se enseña matemáticas son incapaces de volverse matemáticos, y muchos de éstos no son fundidos en el mismo molde. Únicamente tenemos que echar un vistazo a los trabajos de estos últimos para distinguir, entre ellos, dos tipos de mentes: lógicos como Weierstrass, por ejemplo, e intuicionistas como Riemann. Existe la misma diferencia entre nuestros estudiantes. Algunos prefieren tratar sus problemas "por análisis", como dicen, y otros "por geometría".

Resultaría sumamente inútil intentar cambiar algo en esto y, además, no sería deseable. Es bueno que haya lógicos y que haya intuicionistas. ¿Quién se aventuraría a decir que preferiría que Weierstrass nunca hubiese escrito, o que nunca hubiese existido un Riemann? Y así, debemos resignarnos a la diversidad de mentes o, mejor dicho, debemos alegrarnos de ella.

3. Ya que la palabra *comprender* tiene varios significados, las definiciones que serán mejor entendidas por unos no serán las más adecuadas para otros. Tenemos, por un lado, a aquellos que buscan crear una imagen, y por el otro, a aquellos que se limitan a combinar formas vacías, perfectamente inteligibles, aunque de una manera tan pura, que están privadas, por abstracción, de toda materia.

No sé si es necesario citar algunos ejemplos, pero aún así lo haré. Primero, la definición de fracción, que nos proporcionará un ejemplo extremo de esto. En las escuelas primarias, cuando se quiere definir una fracción, se corta una manzana o un pastel. Por supuesto que esto se hace sólo en la imaginación y no en la realidad, porque supongo que el presupuesto escolar no permitiría tal extravagancia. En las preparatorias, por el contrario, o incluso en las universidades, se suele decir: una fracción es la combinación de dos números enteros separados por una línea horizontal. A partir de convenciones es como se definen las operaciones que estos símbolos pueden experimentar; se demuestra que las reglas de estas operaciones son las mismas que en el cálculo de números enteros y, por último, se establece que la multiplicación de una fracción por el denominador, en concordancia con estas reglas, da el numerador. Esto es muy bueno, porque se dirige a jóvenes ya familiarizados con la noción de fracciones a fuerza de cortar manzanas y otros objetos, de tal suerte que su mente, refinada por una considerable educación matemática, ha llegado a desear, poco a poco, una definición

puramente lógica. ¿Pero cuál sería la consternación del principiante si intentásemos ofrecérsela?

Tales son, también, las definiciones encontradas en un libro que ha sido justamente admirado y ha recibido varios reconocimientos; me refiero a los *Fundamentos de la Geometría* [*Grundlagen der Geometrie*] de Hilbert. Veamos cómo es que empieza. “Imaginemos tres sistemas de COSAS, a los que llamaremos puntos, líneas rectas, y planos. Lo que estas “cosas” son, no lo sabemos, y no necesitamos saberlo (incluso sería desafortunado que debamos buscar qué son); todo lo que tenemos derecho a saber sobre ellas es que debemos aprender sus axiomas, como éste, por ejemplo: “Dos puntos diferentes siempre determinan una línea recta”, al que sigue el siguiente comentario: “En lugar de determinar, podríamos decir que la línea recta pasa por estos dos puntos, o que une estos dos puntos, o que los dos puntos están situados sobre la línea recta”. Así, “están situados sobre una línea recta” es simplemente definido como sinónimo de “determinando una línea recta””. Este es un libro por el que tengo una gran estima, aunque no lo recomendaría a los escolares. Y es que yo podría leerlo sin muchos problemas, pero ellos no llegarían muy lejos.

He considerado ejemplos extremos, aun cuando ningún instructor soñaría con llegar tan lejos. Pero, aun cuando no se acerque a tales modelos, ¿no está también expuesto al mismo peligro?

Estamos en una clase de cuarto grado, y el maestro dicta: “Un círculo es la posición de los puntos en un plano que están a la misma distancia de un punto interior llamado centro”. El buen alumno escribe esta frase en su cuaderno mientras el mal alumno dibuja caras en el suyo, pero ninguno de los dos comprende la frase. Después, el maestro toma su tiza y dibuja un círculo sobre el pizarrón. “Ah”, piensan los alumnos, “¿por qué no lo dijo antes? Un círculo es redondo; así habríamos comprendido”. Sin duda, es el maestro quien está en lo correcto. La definición del alumno carecería de valor alguno, porque no podría ser utilizada para ninguna demostración, y, mayormente, porque no les permitiría analizar sus concepciones. Pero debe hacérseles ver que no han comprendido lo que piensan haber comprendido, darse cuenta de la tosquedad de su primitivo concepto, y hacerlos conscientes de que debe ser purificado y refinado.

4. Regresaré a estos ejemplos después, pero antes quiero mostrar dos concepciones opuestas. Existe un violento contraste entre ellas, y éste se explica por la historia de la ciencia. Si leemos un libro escrito hace cincuenta años, la mayor parte de los argumentos nos parecerá carente de exactitud.

En aquel periodo, se asumía que una función continua no puede cambiar su signo sin pasar por el cero; hoy probamos tal suposición. Se asumía que las ordinarias reglas del cálculo eran aplicables a números inconmensurables; hoy probamos tal suposición. Y se asumían muchas otras cosas que a veces eran falsas.

Confiaban en la intuición, pero ésta no puede darnos exactitud, ni siquiera certeza, y esto se ha reconocido cada vez más. Nos enseña, por ejemplo, que toda curva tiene una tangente - es decir, que toda función continua tiene una derivada -, y esto es falso. Se requería de certeza, y para esto ha sido necesario dar cada vez menos lugar a la intuición.

¿Cómo es que ha ocurrido esta necesaria evolución? No pasó mucho tiempo antes de que se reconociera que la exactitud no puede establecerse en los argumentos a menos que sea primero introducida en las definiciones.

Por mucho tiempo, los objetos que ocuparon la atención de los matemáticos estaban mal definidos. Pensaron conocerlos porque los representaban a partir de sus sentidos o de su imaginación, pero únicamente tenían una cruda imagen de ellos, y no una idea precisa propia de un razonamiento.

Es a esto a lo que se han dirigido los esfuerzos de los lógicos, y de manera similar a los números inconmensurables.

La vaga idea de continuidad que debemos a la intuición se ha resuelto en un complicado sistema de desigualdades referido a los números enteros. Así es como todas las dificultades que aterrorizaban a nuestros ancestros cuando reflexionaban sobre los fundamentos del cálculo infinitesimal han finalmente desaparecido.

Hoy en día, en el análisis no hay nada más que números enteros, o sistemas finitos o infinitos de números enteros, unidos por una red de igualdades y desigualdades. Las matemáticas, como ya se ha dicho, han sido *aritmetizadas*.

5. Pero no debemos pensar que la ciencia matemática ha alcanzado la exactitud absoluta sin haber hecho sacrificio alguno. Lo que se ha ganado en exactitud, se ha perdido en objetividad. Es alejándose de la realidad como ha adquirido esta perfecta pureza. Ahora podemos movernos libremente a lo largo de todo su reino, anteriormente lleno de obstáculos. Pero éstos no han desaparecido; únicamente se han desplazado a la frontera, y tendrán que ser conquistados de nuevo si deseamos cruzar la frontera y penetrar en los reinos de la práctica.

Solíamos poseer una vaga noción, formada por elementos incongruentes - algunos de éstos *a priori* y otros derivados de experiencias más o menos digeridas -, y

pensábamos conocer sus principales propiedades a partir de la intuición. Hoy rechazamos el elemento empírico y conservamos únicamente los conformados apriorísticamente. Una de las propiedades hace la suerte de definición, y todas las otras son deducidas de ésta gracias a un razonamiento exacto. Esto está muy bien, pero aún queda por probar que esta propiedad, que se ha vuelto una definición, pertenece a los objetos reales mostrados por la experiencia, y desde la cual habíamos trazado, originalmente, nuestra vaga noción intuitiva. Para poder probarlo, ciertamente necesitamos apelar a la experiencia o hacer un esfuerzo intuitivo; y si no podemos probarlo, nuestros teoremas serán perfectamente exactos pero perfectamente inútiles.

La lógica, a veces, engendra monstruos. Por medio siglo han ido surgiendo una multitud de funciones realmente extrañas, que parecen esmerarse en tener tan poca semejanza como sea posible con las funciones que son de algún uso. No hay más continuidad, o bien hay continuidad pero no derivadas, etc. Más que esto, y siempre desde el punto de vista de la lógica, estas extrañas funciones son las más generales: aquellas que se cumplen sin ser buscadas ya no son más que un caso particular, y se les ha dejado en un rincón bastante pequeño.

Antes, cuando se inventaba una nueva función, era en vista de algún fin práctico. Hoy en día se inventan con el propósito de mostrar las faltas de los razonamientos de nuestros antepasados, y nunca podremos obtener nada más que esto de ellas.

Si la lógica fuese la única guía del maestro, tendría que comenzar por enseñar las funciones más generales, esto es, las más extrañas. Tendría que poner al principiante a luchar contra esta colección de monstruosidades. Si no se hace esto, podrían decir los lógicos, solamente se alcanzará la exactitud por etapas.

6. Probablemente esto sea cierto, pero no podemos tener tan poco en cuenta a la realidad, y no me refiero únicamente a la realidad del mundo sensible, que no obstante tiene su valor, ya que es por batallar con ella que nueve de cada diez alumnos piden por armas; hay una realidad más sutil que constituye la vida de las entidades matemáticas, y es algo más que la lógica.

Nuestro cuerpo está compuesto de células, y las células de átomos, ¿pero son estas células y estos átomos toda la realidad del cuerpo humano? ¿No es la forma en la que estas células se ajustan, de donde resulta la unidad del individuo, también una realidad, y de mucho mayor interés?

¿Podría pensar un zoólogo que posee un adecuado conocimiento del elefante si nunca lo ha estudiado excepto a través de un microscopio?

Es lo mismo con las matemáticas. Cuando el lógico ha resuelto cada demostración en una multitud de operaciones elementales, todas ellas correctas, no estará en posesión de toda la realidad; ese algo indefinible que constituye la unidad de la demostración se le escapará por completo.

¿Qué bien se obtiene la admirar el trabajo del albañil en los edificios erigidos por grandes arquitectos, si no podemos comprender el plan general de éstos? La lógica pura no puede darnos la vista del todo; es en la intuición donde debemos buscarla.

Tomemos, por ejemplo, la idea de función continua. Para empezar, es sólo una imagen perceptible, una línea trazada sobre un pizarrón. Poco a poco es purificada, y es usada para construir un complicado sistema de desigualdades que reproduce todas las líneas de la imagen original. Cuando el trabajo está a punto de acabar, el *centrado* es removido, tal como sucede con la construcción de un arco, y esta cruda representación es, de aquí en adelante, un soporte inútil, y desaparece y únicamente queda el edificio, irreprochable a los ojos del lógico. Y, sin embargo, si el profesor no hubiese apelado a la imagen original, si no hubiese remplazado el *centrado* por un momento, ¿cómo adivinaría el alumno por qué capricho se han andamiado todas estas desigualdades unas sobre otras de esta manera? La definición sería lógicamente correcta, pero no mostraría la verdadera realidad.

7. Así que estamos obligados a retroceder un paso. Sin duda es difícil para el maestro enseñar lo que no lo satisface por completo, pero la satisfacción del maestro no es el único objetivo de la educación. Debemos, antes que nada, preocuparnos por la mente del alumno, y por aquello en lo que queremos que se convierta.

Los zoólogos afirman que el desarrollo embrionario de un animal repite, en un periodo muy corto de tiempo, toda la historia de sus antecesores en las edades geológicas. Parece ser lo mismo con el desarrollo mental. El educador debe hacer que el niño pase por todo lo que han pasado sus padres, sin duda más rápido, pero sin saltarse etapa alguna. Considerando esto, la historia de cualquier ciencia debe ser nuestra primera guía.

Nuestros padres pensaron saber qué era una fracción, o la continuidad, o el área de una superficie curva; somos nosotros quienes nos hemos dado cuenta de que en realidad no lo sabían. De la misma manera, nuestros estudiantes piensan saber lo anterior cuando comienzan a estudiar matemáticas seriamente. Si, sin ninguna otra preparación, llego y les digo: “No, no lo sabes; no comprendes lo que crees comprender, y debo demostrarte lo que te parece evidente”; y si en la demostración me baso en

premisas que parecen menos evidentes que la conclusión, ¿qué es lo que pensará el desdichado estudiante? Pensará que la ciencia matemática no es nada más que un arbitrario agregado de inútiles sutilezas, o perderá el gusto por ella, o bien la verá como un juego entretenido, y llegará a un estado mental análogo al de los sofistas.

Más tarde, por el contrario, cuando la mente del alumno haya estado familiarizada con el razonamiento matemático y haya madurado gracias a esta larga intimidad, las dudas surgirán de su propia voluntad, y entonces la demostración será bienvenida. Se despertarán nuevas dudas, y las preguntas se le presentarán sucesivamente al niño, tal como se presentaron a nuestros padres, hasta que lleguen a un punto en donde sólo los satisfaga una perfecta exactitud. No es suficiente con tener dudas sobre todo; debemos saber por qué dudamos.

8. El principal objetivo de la educación matemática es desarrollar ciertas facultades mentales, y, entre éstas, la intuición no es la menos preciada. Es a través de ella que el mundo matemático se mantiene en contacto con el mundo real, e incluso si las matemáticas puras pudieran desenvolverse sin ella, aún tendríamos que recurrir a la intuición para llenar el abismo que separa al símbolo de la realidad. El practicante siempre la necesitará, y por cada geómetra puro debe haber cien practicantes.

El ingeniero debe recibir un entrenamiento matemático completo, ¿pero qué uso debe tener para él, excepto para permitirle ver los distintos aspectos de las cosas de manera rápida? No tiene tiempo para ser demasiado minucioso, y en los complejos objetos físicos que se le presentan, inmediatamente debe reconocer el punto en donde pueda aplicar los instrumentos matemáticos que hemos puesto en sus manos. ¿Cómo podría hacerlo si dejamos, entre estos dos momentos, aquel profundo abismo excavado por los lógicos?

9. Además, los futuros ingenieros son los alumnos menos numerosos, destinados, a su vez, a volverse maestros, de tal suerte que deben ir a la raíz más profunda de la materia. Un conocimiento exacto y profundo de los primeros principios es indispensable para ellos. Pero lo anterior no es razón para no cultivar su intuición, ya que se formarían una idea errónea de la ciencia si nunca viesen más de un lado de ella y, por otra parte, no podrían desarrollar en sus alumnos una cualidad que ellos mismos no poseen.

Para el geómetra puro esta facultad es necesaria: es por la lógica que probamos, pero es por la intuición que descubrimos. Saber criticar es bueno, pero saber crear es mejor. Sabemos cómo reconocer si una combinación es correcta, pero esto no será de

mucho uso si se carece del arte para seleccionar de entre todas las posibles combinaciones. La lógica nos enseña que en tal y cual camino estaremos seguros de no encontrar un obstáculo, pero no nos dice cuál es el camino que nos llevará al destino deseado. Para esto, es necesario dilucidar, desde lejos, el fin del camino, y la facultad que nos permite esto es la intuición. Sin ella, el geómetra sería como un escritor con excelente gramática pero carente de ideas. Ahora bien, ¿cómo va a desarrollarse esta facultad si, tan pronto como se muestra, es perseguida y proscrita, si aprendemos a desconfiar de ella incluso antes de saber qué bien podemos obtener de la misma?

Y en este punto, permítanme insertar un paréntesis para insistir en la importancia de los ejercicios escritos. Las composiciones por escrito quizá no tienen la suficiente prominencia en ciertos exámenes. En la École Polytechnique, por ejemplo, se me dice que la insistencia sobre tales composiciones cerraría la puerta a alumnos muy buenos que conocen de sus temas y los comprenden bien, pero son incapaces de aplicarlos en el menor grado. Justo antes mencioné que la palabra *comprender* tiene varios significados. Tales alumnos sólo comprenden en el primer sentido de la palabra, y hemos visto que esto no es suficiente para llegar a ser un ingeniero o un geómetra. Pues bien, ya que tenemos que elegir, prefiero quedarme con aquellos que comprenden por completo.

10. ¿Pero no es el arte del razonamiento exacto también una preciosa cualidad que el maestro de matemáticas debe cultivar por sobre todo lo demás? No estoy en peligro de olvidarlo: debemos darle atención, y desde el principio. Me afligiría mucho ver que la geometría degenerase en algún tipo de taquimetría de bajo grado, y no comparto, para nada, las radicales doctrinas de ciertos profesores alemanes. Pero tenemos la suficiente oportunidad para entrenar a nuestros alumnos en el correcto razonamiento en aquellas partes de las matemáticas en donde no ocurren las desventajas que he mencionado. Tenemos una gran serie de teoremas en donde la lógica absoluta ha dominado desde el principio, por así decirlo, de manera natural, y en donde los primeros geómetras nos dieron modelos que debemos admirar e imitar continuamente.

Es al exponer los primeros principios que debemos evitar demasiadas sutilezas, porque esto resultaría desalentador, e inútil además. No podemos probar todo, no podemos definir todo, y siempre será necesario recurrir a la intuición. ¿Qué importa si esto lo hacemos un poco antes o un poco después, e incluso si lo hacemos un poco más o un poco menos, siempre que, haciendo un uso correcto de las premisas que nos da, aprendamos a razonar de forma precisa?

11. ¿Es posible satisfacer tantas condiciones opuestas? ¿Es posible, especialmente, cuando se trata de ofrecer una definición? ¿Cómo vamos a encontrar una declaración que satisfaga, al mismo tiempo, las inexorables leyes de la lógica y nuestro deseo de comprender las nuevas nociones puestas en el esquema general de la ciencia, nuestra necesidad, pues, de pensar en imágenes? Las más de las veces, no la encontraremos, y es por eso que la declaración de una definición no es suficiente; debe ser preparada y justificada.

¿A qué me refiero con esto? Es sabido que a menudo se ha dicho que cada definición implica un axioma, ya que afirma la existencia del objeto definido. La definición, entonces, no estará justificada desde el punto de vista lógico hasta que hayamos *probado* que no supone contradicción, ya sea en sus términos, o con las verdades previamente admitidas.

Pero eso no es suficiente. Una definición es declarada como una convención, pero la mayoría de las mentes se rebelarían si se intentase poner sobre ellas una convención *arbitraria*, y no descansarían hasta haber obtenido respuestas a una gran cantidad de preguntas.

Frecuentemente, las definiciones matemáticas son, como ha mostrado el señor Liard, construcciones reales hechas a partir de nociones más simples. ¿Pero por qué deben ser acomodados así estos elementos, cuando pueden serlo de mil maneras distintas? ¿Es simple capricho? Si no, ¿por qué tiene esta combinación más derecho que las otras a existir? ¿Qué necesidad satisface? ¿Cómo es que se previó que desempeñaría un papel importante en el desarrollo de la ciencia, y que abreviaría nuestro razonamiento y nuestros cálculos?[13] ¿Existe algún objeto familiar en la naturaleza que sea, por así decirlo, su indistinta y áspera imagen?

Eso no es todo. Si se da una respuesta satisfactoria a todas estas preguntas, debemos saber que el recién llegado tiene derecho a ser bautizado. Pero la elección de un nombre tampoco es arbitraria; debemos explicar qué analogías nos han guiado, y, si hemos dado nombres análogos a distintas cosas, estas cosas, por lo menos, difieren sólo en materia, y tienen algunas semejanzas en forma, y que sus propiedades son análogas y, por decirlo de alguna manera, paralelas.

Es sobre estos términos que vamos a satisfacer todas las propensiones. Si la declaración es lo suficientemente exacta como para satisfacer al lógico, la justificación

[13] Aquí, *abreviar* debe entenderse como sinónimo de ahorrar pasos, y no de menguar, o acortar. Nota del Traductor.

también satisfará al intuicionista. Pero todavía lo podemos hacer mejor. Siempre que sea posible, la justificación precederá a la declaración y la confeccionará. La declaración general será dirigida por el estudio de algunos ejemplos particulares.

Unas palabras más. El objetivo de cada parte de la declaración de una definición es distinguir el objeto a ser definido de la clase de otros objetos cercanos. La definición no será comprendida hasta que se haya mostrado no sólo el objeto definido, sino los objetos cercanos de los cuales se distingue; hasta que haya sido comprendida la diferencia, y se haya añadido, explícitamente, la razón para decir esto o aquello al momento de declarar la definición.

Ahora es tiempo de dejar las generalidades y de averiguar cómo es que los principios un tanto abstractos que he expuesto pueden aplicarse en la aritmética, en la geometría, en el análisis, y en la mecánica.

ARITMÉTICA

No es necesario que definamos al número entero, no obstante que, por lo general, se definen las operaciones con este tipo de números. Pienso que los alumnos se aprenden estas definiciones de memoria y no añaden significado alguno a las mismas. Para esto hay dos razones: primero, se les enseñan demasiado temprano, cuando su mente no tiene necesidad de ellas; y, segundo, estas definiciones no son satisfactorias desde el punto de vista lógico. En lo que concierne a la adición [suma], no podemos encontrar una buena definición simplemente porque debemos detenernos en algún lado, y no podemos definir todo. La definición de sumar es decir que consiste en sumar, y todo lo que podemos hacer es empezar con un cierto número de ejemplos concretos y decir que la operación recién realizada es llamada *suma*.

Para la sustracción [resta] es otra cosa. Lógicamente, puede ser definida como la operación inversa de la suma. ¿Pero es así como debemos empezar? Aquí, de nuevo, debemos comenzar con ejemplos, y mostrar a partir de éstos la relación existente entre dos operaciones. De esta forma, la definición estará dispuesta y justificada.

No es muy distinto con la multiplicación. Aquí, debemos considerar un problema particular, y mostrar que puede ser resuelto añadiendo varios números iguales. Después debemos señalar que obtenemos más rápido el mismo resultado si multiplicamos, operación que los alumnos ya realizan de memoria, y la definición lógica surgirá de manera natural.

Debemos definir a la división como la operación inversa de la multiplicación, pero antes es necesario comenzar con un ejemplo tomado de la noción de *compartir*, y mostrar, a partir de este ejemplo, que la multiplicación reproduce al dividendo.

Quedan por definir las operaciones con fracciones, y para esto no hay dificultad alguna, excepto quizá en el caso de la multiplicación. Lo mejor es exponer primero la teoría de las proporciones, ya que sólo de ésta puede surgir una definición lógica para el caso que nos ocupa. Pero, con el fin de ganar la aceptación para las definiciones que se encuentran al principio de esta teoría, debemos disponerlas a partir de numerosos ejemplos tomados de los problemas clásicos relativos a la regla de tres, y tenemos que ser muy cuidadosos a la hora de introducir datos fraccionales. No debemos dudar, tampoco, en familiarizar a los alumnos con la noción de proporción a partir de figuras geométricas, ya sea apelando a su recuerdo si ya han hecho algo de geometría, o a la intuición directa si es que no lo han hecho; esto último, además, los preparará para hacerlo. Agregaría, como conclusión, que después de haber definido la multiplicación de fracciones, debemos justificar esta definición demostrando que es conmutativa, asociativa, y distributiva, y dejando muy claro a los oyentes que la verificación se ha hecho para justificar la definición.

Podemos observar qué parte es desempeñada, en todo esto, por las figuras geométricas, y esta parte está justificada por la filosofía e historia de la ciencia. Si la aritmética hubiese permanecido libre de toda mezcla con la geometría, no se habría conocido nada fuera de los números enteros. Pero fue precisamente para adaptarla a los requerimientos geométricos que se descubrió algo más.

GEOMETRÍA

En la geometría nos encontramos, en seguida, con la noción de línea recta. ¿Es posible definirla? La definición común, el camino más corto de un punto a otro, no me satisface en absoluto. Simplemente es necesario comenzar con la *regla*, y mostrar primero a los alumnos cómo es que podemos verificar una regla al hacerla girar. Esta verificación constituye la verdadera definición de una línea recta, porque ésta es un eje de rotación. Después debemos mostrar cómo verificar la regla al deslizarla, y tendremos así una de las propiedades más importantes de una línea recta. En cuanto a la otra propiedad - la de ser el camino más corto de un punto a otro -, es un teorema que puede ser demostrado de manera apodíctica, pero la demostración es demasiado avanzada como para encontrar

lugar alguno en la educación secundaria. Será mejor mostrar que una regla previamente verificada puede aplicarse a un hilo tenso. No debemos dudar, ante la presencia de dificultades de este tipo, en multiplicar los axiomas justificándolos a partir de toscos ejemplos.

Debemos admitir algunos axiomas, y no es tan grave admitir algunos más de los estrictamente necesarios. Lo esencial es aprender a razonar exactamente con los axiomas ya admitidos. Francisque Sarcey[14], quien adoraba repetirse a sí mismo, decía que la audiencia en un teatro acepta de buena gana todos los postulados impuestos al principio, pero que, una vez abierto el telón, se vuelve inexorable en la cuenta de la lógica. Pues bien, sucede lo mismo con las matemáticas.

En cuanto al círculo, podemos comenzar con el compás, y los alumnos reconocerán, inmediatamente, la curva trazada. Después debemos señalarles que la distancia de los dos puntos del instrumento permanece constante, que uno de estos puntos está fijo y el otro es movible, y llegaremos así, de manera natural, a una definición lógica.

La definición del plano, por otra parte, implica un axioma, y no debemos intentar ocultar este hecho. Tomemos un pizarrón y señalemos cómo una regla movible puede ser aplicada, constantemente, a éste, y lo anterior mientras se conservan tres grados de libertad. Debemos comparar esto con el cilindro y el cono, superficies a las cuales no puede aplicarse una línea recta a menos que permitamos únicamente dos grados de libertad. Después tomemos tres pizarrones y mostremos, primero, que pueden deslizarse sin perder contacto uno con otro, y lo anterior con tres grados de libertad. Por último, y para distinguir el plano de la esfera, [mostrar] que dos de estos pizarrones que pueden ser aplicados a un tercero también pueden ser aplicados uno con otro.

Quizá el lector esté sorprendido por este uso constante de instrumentos movibles. Pues bien, diría que no es un artificio tosco, y que es mucho más filosófico de lo que en un principio parecería. ¿Qué es la geometría para el filósofo? Es el estudio de un grupo. ¿Y qué grupo? El del movimiento de los cuerpos sólidos. ¿Cómo debemos definir este grupo, pues, sin hacer que se muevan algunos cuerpos sólidos?

¿Debemos conservar la clásica definición de las paralelas, y decir que damos este nombre a dos líneas rectas, situadas en el mismo plano y que, hasta ahora nunca

[14] Francisque Sarcey (1827-1899) fue un periodista y crítico francés. Nota del Traductor.

producidas, nunca se encuentran una con otra?[15] No, porque esta definición es negativa, porque no puede ser verificada experimentalmente, y no puede, en consecuencia, ser considerada como un dato inmediato de la intuición. Pero, principalmente, porque es totalmente extraña a la noción de grupo y a la consideración del movimiento de los cuerpos sólidos que es, como ya he dicho, la verdadera fuente de la geometría. ¿No sería mejor definir, primero, a la transposición rectilínea de una figura invariable como el movimiento en donde todos los puntos de esta figura tienen trayectorias rectilíneas, y demostrar que tal transposición es posible, haciendo que un cuadrado se desplace sobre una regla? De esta verificación experimental, elevada a la forma de un axioma, será fácil deducir la noción de paralela y el postulado de Euclides.

MECÁNICA

Necesito regresar a la definición de velocidad o de aceleración o de otras nociones cinemáticas, ya que estarán más propiamente conectadas con las ideas de espacio y tiempo, que por sí mismas involucran. Por otra parte, me detendré en las nociones dinámicas de fuerza y masa.

Hay una cosa que me impresiona, y es qué tan lejos están las personas jóvenes que han recibido una educación secundaria de aplicar, al mundo real, las leyes mecánicas que se les han enseñado. No es solamente que sean incapaces de hacerlo, sino que ni siquiera piensan en ello. Para ellos, el mundo de la ciencia y el de la realidad están aislados herméticamente. No es extraño ver a un hombre bien vestido, probablemente un universitario, sentado en un carruaje e imaginándose que está moviéndolo al manipular el mando de instrumentos, y esto sin tener en cuenta el principio de acción y reacción.

Si analizamos el estado mental de nuestros alumnos, esto nos sorprenderá menos. ¿Cuál es, para ellos, la verdadera definición de fuerza? No es aquella que repiten, sino aquella que se encuentra oculta en un rincón de su intelecto, y desde ahí dirigen todo. Esta es su definición: las fuerzas son las flechas de las que están compuestos los paralelogramos, y estas flechas son cosas imaginarias que no tienen nada que ver con lo que existe en la naturaleza. Esto no sucedería si se les hubiesen mostrado fuerzas en realidad, antes de representárselas por flechas.

[15] Poincaré se refiere al quinto postulado de Euclides, que afirma que por un punto dado externo a una línea recta solamente puede pasar una paralela a tal línea recta. Nota del Traductor.

¿Cómo debemos definir la fuerza? Si queremos una definición lógica, no hay una buena, como creo haber demostrado satisfactoriamente en otra parte. Está también la definición antropomórfica, a saber, la sensación del esfuerzo muscular, pero ésta es ciertamente muy tosca, y no podemos extraer nada útil de ella.

El siguiente es el curso que debemos seguir. Primero, para poder impartir un conocimiento de la fuerza como género, debemos mostrar, una después de otra, todas las especies de este género. Éstas son muy numerosas y de gran variedad. Está la presión de los líquidos sobre los lados de los recipientes que los contienen, la tensión de los cables, la elasticidad de un resorte, la gravedad que actúa sobre todas las moléculas de un cuerpo, la fricción, la acción y reacción mutua normal de dos sólidos en contacto, etc.

Esta es sólo una definición cualitativa; debemos aprender a medir una fuerza. Para este propósito, primero debemos mostrar que podemos remplazar una fuerza por otra sin perturbar el equilibrio, y encontraremos el primer ejemplo de esta sustitución en el balance y en las escalas dobles de Borda. Después debemos mostrar que podemos remplazar un peso, no solamente por otro peso, sino por fuerzas de distinta naturaleza; por ejemplo, el freno dinamómetro de Prony nos permite remplazar un peso por una fricción. De todo esto surge la noción de equivalencia de dos fuerzas.

También es necesario definir la dirección de una fuerza. Si una fuerza F es equivalente a otra fuerza F^1 aplicada al cuerpo que estamos considerando a partir de una cuerda tensa, de tal suerte que F puede ser remplazada por F^1 sin perturbar el equilibrio, entonces el punto de unión de la cuerda será, por definición, el punto de aplicación de la fuerza F^1 y el de la equivalente fuerza F, y la dirección de la cuerda será la dirección de la fuerza F^1 y también la de la equivalente fuerza F.

De esto debemos pasar a la comparación de la magnitud de fuerzas. Si una fuerza puede remplazar a otras dos de la misma dirección, debe ser igual a su suma, y debemos mostrar, por ejemplo, que un peso de 20 kilos puede remplazar dos pesos de 10 kilos.

Pero esto no es todo. Ahora sabemos cómo comparar la intensidad de dos fuerzas que tienen la misma dirección y el mismo punto de aplicación, pero debemos aprender a hacer esto aun cuando las direcciones no sean las mismas. Para este propósito, imaginemos una cuerda estirada por un peso pasando por una polea; decimos, entonces, que la tensión de las dos porciones de la cuerda es la misma, e igual al peso.

Y he aquí nuestra definición. Nos permite comparar las tensiones de nuestras dos porciones y, al hacer uso de las definiciones precedentes, comparar dos fuerzas de cualquier tipo teniendo la misma dirección que estas dos porciones. Debemos justificar lo anterior al mostrar que la tensión de la última porción sigue siendo la misma para el mismo peso, sin importar el número y la disposición de las poleas. Después debemos completar esto al mostrar que lo anterior no es cierto a menos que las poleas estén libres de fricción.

Una vez dominadas estas definiciones, debemos mostrar que el punto de aplicación, la dirección, y la intensidad son suficientes para determinar una fuerza; que dos fuerzas para las cuales estos tres elementos son los mismos, son *siempre* equivalentes, y *siempre* pueden remplazarse una por la otra, ya sea en equilibrio o en movimiento, y esto sin importar qué otras fuerzas entren en juego.

Debemos mostrar que dos fuerzas concurrentes siempre pueden ser remplazadas por una única fuerza resultante, y que *esta resultante permanece la misma* sin importar si el cuerpo se encuentra en reposo o en movimiento, y sin importar cuáles sean las otras fuerzas aplicada a ella.

Por último, debemos mostrar que las fuerzas definidas como lo hemos hecho satisfacen el principio de igualdad de acción y reacción. Todo esto lo aprendemos experimentando, y solamente experimentando.

Será suficiente con citar algunos experimentos comunes que los propios alumnos hacen día a día aun sin estar conscientes de ello, y realizar, ante ellos, un pequeño número de experimentos simples y bien elegidos.

No es hasta que hayamos pasado por todos estos rodeos que podemos representar las fuerzas a partir de flechas, e incluso entonces pienso que sería deseable, de vez en cuando, y a medida que el argumento se desarrolla, regresar del símbolo a la realidad. No resultaría difícil, por ejemplo, ilustrar el paralelogramo de fuerzas con la ayuda de un aparato compuesto por tres cuerdas pasando por ciertas poleas, estiradas por determinados pesos, y produciendo un equilibrio al estirarse sobre el mismo punto.

Una vez que conocemos la fuerza, es fácil definir la masa. Esta vez, la definición debe ser tomada de la dinámica. Y no podría ser de otra forma, ya que lo que se busca es dejar en claro la distinción entre masa y peso. Aquí, de nuevo, la definición debe ser preparada experimentalmente. Existe, en efecto, una máquina cuyo propósito parece ser mostrar qué es la masa, y me estoy refiriendo a la máquina de Atwood. Además de esto, debemos recordar las leyes de la caída de los cuerpos, y cómo la aceleración de la

gravedad es la misma tanto para cuerpos pesados como ligeros, y que varía de acuerdo con la latitud, etc.

Ahora bien, si se me dice que todos los métodos por los que he abogado ya son aplicados desde hace tiempo en las escuelas, estaré más contento que sorprendido de escucharlo. Sé que, en general, nuestra educación matemática es buena, y mi intención no es alterarla (incluso me angustiaría esto), sino mejorarla de manera gradual y progresiva. Esta educación no debe sufrir súbitas variaciones por el aliento caprichoso de modas efímeras. Ante tales tormentas, su alto valor educativo acabaría por hundirse. Una buena y sana lógica debe seguir siendo parte de sus fundamentos, y la definición a partir de ejemplos es siempre necesaria (aunque debe preparar a la definición lógica y no tomar su lugar); por lo menos debe hacerse extrañar cuando la verdadera definición lógica no pueda ofrecerse a ningún propósito excepto en la educación superior.

Se comprenderá que lo que he dicho aquí no implica, de ninguna manera, el abandono de lo que en otras partes he escrito. A menudo he tenido ocasión de criticar definiciones que hoy defiendo. Estas críticas siguen siendo válidas por completo; las definiciones sólo pueden ser provisionales, pero es a partir de ellas que debemos avanzar.

CAPÍTULO III

MATEMÁTICAS Y LÓGICA

INTRODUCCIÓN

¿Pueden las matemáticas reducirse a la lógica sin tener que apelar a principios ajenos a sí misma? Existe toda una escuela de pensamiento, llena de ardor y fe, que tiene como propósito establecer esta posibilidad. Tienen su propio lenguaje especial, en donde ya no se hace uso de palabras, sino sólo de signos. Este lenguaje es comprendido solamente por unos pocos iniciados, de modo que el vulgo se inclina ante las decisivas afirmaciones de los adeptos. Quizá resulte útil examinar estas afirmaciones de una manera más cercana, y así ver si justifican el tono perentorio que las caracteriza.

Pero para que la naturaleza de esta cuestión sea propiamente entendida, es necesario recurrir a algunos detalles históricos y, de manera más particular, revisar el trabajo de Cantor.

La noción de infinito ha sido introducida desde hace tiempo en las matemáticas, pero este infinito era lo que los filósofos llamaban *devenir*. El infinito matemático era únicamente una cantidad susceptible a crecer más allá de todo límite; era una cantidad variable sobre la cual no podía decirse que *ha pasado*, sino que *pasará*, todos los límites.

Cantor se propuso introducir en las matemáticas un *infinito real*, es decir, una cantidad ya no susceptible de pasar todos los límites, sino una que ya lo ha hecho. Se hizo preguntas como las siguientes: ¿Hay más puntos en el espacio que números enteros? ¿Hay más puntos en el espacio que sobre un plano?, etc.

Entonces el número de números enteros, el de puntos en el espacio, etc., constituye lo que él ha denominado un *número cardinal transfinito*, esto es, un número cardinal mayor que todos los números cardinales ordinarios. Y se entretuvo comparando estos números cardinales transfinitos, arreglando - en un orden adecuado - los elementos de un todo contendiendo un número infinito de elementos; también imaginó aquello que denominó números ordinales transfinitos, pero sobre esto ya no hablaré.

Muchos matemáticos han seguido sus pasos, y han puesto su atención sobre una serie de cuestiones del mismo tipo. Se han vuelto tan familiares con los números

transfinitos, que han llegado al punto de hacer que la teoría de los números finitos dependa de la teoría cantoriana de los números cardinales. En su opinión, si nuestra intención es enseñar aritmética de una manera verdaderamente lógica, debemos comenzar por establecer las propiedades generales de los números cardinales transfinitos, y después distinguir, de entre ellos, toda una clase ciertamente pequeña, a saber, la de los números enteros ordinarios. Gracias a este procedimiento indirecto, podríamos conseguir probar todas las proposiciones relacionadas con esta pequeña clase (es decir, toda nuestra aritmética y nuestra álgebra) sin hacer uso de principio alguno ajeno a la lógica.

Este método es evidentemente contrario a toda psicología sana. No es ciertamente de esta manera como la mente humana procedió para construir las matemáticas, e imagino, también, que sus autores no desean introducirlo en la enseñanza secundaria. ¿Pero es por lo menos lógico o, más propiamente, preciso? Bien podemos dudarlo.

Sea como fuere, los geómetras que han empleado este método son muy numerosos. Han ido acumulando fórmulas e imaginan haberse librado de todo aquello que no es lógica pura al escribir tratados en donde las fórmulas ya no están intercaladas con algún texto explicativo, como en los trabajos ordinarios sobre matemáticas, sino en donde el texto ha desaparecido por completo.

Desafortunadamente, han llegado a resultados contradictorios, a lo que han llamado *antinomias cantorianas*, y a las que tendremos ocasión de regresar después. Estas contradicciones no los han desanimado, y han intentado modificar sus reglas para poder disponer de aquellas [contradicciones] que ya han aparecido, pero sin obtener garantía alguna de que, al proceder así, no aparezcan nuevas.

Es tiempo de que estas exageraciones sean tratadas como se merecen. No tengo esperanza alguna de convencer a estos lógicos, ya que han vivido demasiado tiempo en esta atmósfera. Además, cuando habremos refutado alguna de sus demostraciones, es muy seguro que la encontraremos de nuevo con cambios insignificantes, y algunas de ellas ya se han levantado varias veces de sus cenizas. Así fue en otros tiempos la hidra de Lerna, con sus célebres cabezas creciendo una y otra vez. Hércules tuvo éxito porque su hidra sólo tenía nueve cabezas (a menos que, de hecho, hubiesen sido once), pero en el caso que nos ocupa son demasiadas, y se encuentran dispersas por Inglaterra, Alemania, Italia, y Francia, y se vería forzado a abandonar su misión. De tal forma que únicamente apelo a personas no prejuiciosas y con sentido común.

I

En estos últimos años, han sido publicados un gran número de trabajos sobre matemáticas puras y sobre la filosofía de las matemáticas, con miras a desacoplar y aislar los elementos lógicos del razonamiento matemático. Estos trabajos han sido analizados y expuestos de forma muy lúcida por el señor Couturat en un trabajo titulado *Les principes des mathématiques*.

En opinión del señor Couturat, estos trabajos, y particularmente los del señor Russell y los del señor Peano, han resuelto definitivamente la larga controversia entre Leibniz y Kant. Han mostrado que no existe tal cosa como un juicio sintético *a priori* (el término empleado por Kant para designar los juicios que no pueden demostrarse analíticamente, ni reducidos a identidad alguna, ni establecidos experimentalmente); han mostrado que las matemáticas son completamente reducibles a la lógica, y que la intuición no desempeña papel alguno en todo esto.

Esto es lo que expone el señor Couturat en el trabajo que recién he nombrado. También sostuvo las mismas opiniones, aún de manera más explícita, en su discurso en el aniversario de Kant, de forma tal que escuché a mi vecino susurrar: “Es muy evidente que este es el centenario de la *muerte* de Kant”.

¿Podemos suscribirnos a esta condena tan decisiva? No lo pienso así, e intentaré mostrar por qué.

II

Lo que más asombro despierta en la nueva matemática es su carácter puramente formal. “Imaginemos”, dice Hilbert, “tres tipos de *cosas*, a las que llamaremos puntos, líneas rectas, y planos; convengamos en que una línea recta estará determinada por dos puntos y que, en lugar de decir que esta línea recta está determinada por estos dos puntos, podríamos decir que pasa por estos dos puntos, o que estos dos puntos están situados sobre la línea recta”. Lo que estas *cosas* son, no solamente no lo sabemos, sino que no debemos buscar saberlo. Es innecesario, y cualquiera que nunca haya visto un punto o una línea recta o un plano puede hacer geometría igual de bien que nosotros. Para que las palabras *pasa por* o las palabras *están situados sobre* no evoquen imagen alguna en nuestras mentes, lo primero es simplemente considerado como sinónimo de *estar determinada*, y lo segundo de *determinan*.

Así, fácilmente se comprende que, para demostrar un teorema, no es necesario ni incluso útil conocer qué significa. Podríamos remplazar la geometría por el *razonamiento piano* imaginado por Stanley Jevons; o, si se prefiere, podríamos idear una máquina en donde pongamos en ella axiomas en un extremo y saquemos teoremas en el otro, como aquella legendaria máquina en Chicago en donde los cerdos entran vivos y salen transformados en jamones y salchichas. Ya no es más necesario para el matemático que para estas máquinas saber qué se está haciendo.

No culpo a Hilbert por este carácter formal de su geometría. Se ha visto obligado a ir en esta dirección dado el problema que se propuso resolver. Deseaba reducir, a un mínimo, el número de axiomas fundamentales de la geometría, y hacer una enumeración completa de ellos. Ahora bien, en los argumentos donde nuestra mente permanece activa, en aquellos en donde la intuición aún desempeña un papel, en los argumentos vivos, por así decirlo, no es fácil introducir un axioma o un postulado que pase inadvertido. De acuerdo con esto, no fue hasta que Hilbert redujo todos los argumentos geométricos a una forma puramente mecánica que pudo estar seguro de haber tenido éxito en su diseño y de haber completado su trabajo.

Lo que Hilbert ha hecho en la geometría, otros lo han intentado hacer en la aritmética y el análisis. Incluso si hubiesen sido completamente exitosos, ¿estarían los kantianos condenados finalmente al silencio? Quizá no, porque lo cierto es que no podemos reducir el pensamiento matemático a una forma vacía sin mutilarlo. Incluso admitiendo que ha sido establecido que todos los teoremas pueden deducirse a partir de procesos puramente analíticos, por simples combinaciones lógicas de un número finito de axiomas, y que estos axiomas no son nada más que convenciones, el filósofo tendría el derecho a buscar el origen de estas convenciones, y a preguntar por qué se juzgaron como preferibles a convenciones contrarias.

Y, además, la exactitud lógica de los argumentos que condujeron de los axiomas a los teoremas no es lo único que debemos atender. ¿Constituyen las reglas de la lógica perfecta el todo de las matemáticas? Esto sería como decir que el arte del jugador de ajedrez se reduce a las reglas del movimiento de las piezas. Debe hacerse una selección de entre todas las construcciones que pueden combinarse con los materiales proporcionados por la lógica. El verdadero geómetra hace esta selección de manera juiciosa, porque está guiado por un instinto seguro, o por alguna vaga consciencia de no sé qué geometría más profunda y oculta, y que por sí sola da un valor al edificio construido.

Buscar el origen de este instinto, y estudiar las leyes de esta geometría profunda que puede sentirse pero no expresarse, sería una noble tarea para el filósofo que no permite que la lógica lo sea todo. Pero este no es el punto de vista que deseo adoptar, y esta no es la forma en la que quiero proponer la cuestión. Este instinto sobre el que he hablado es necesario al descubridor, pero parecería, en principio, que podríamos prescindir de él para el estudio de la ciencia una vez creada. Pues bien, lo que me interesa descubrir es si es cierto que, una vez admitidos los principios de la lógica, podemos ya no digamos descubrir, sino demostrar todas las verdades matemáticas sin tener que apelar a la intuición.

III

A esta pregunta ya ofrecí una respuesta negativa. (Véase *Ciencia e Hipótesis*, capítulo I). ¿Debe modificarse nuestra respuesta a la luz de los trabajos recientes? Yo diría que no, porque "el principio de inducción completa" me pareció, en seguida, necesario al matemático, e irreducible a la lógica. Conocemos la declaración del principio: "Si una propiedad es cierta para el número 1, y si se establece que es cierta para $n+1$, siempre que sea cierta para *n*, será cierta para todos los números enteros". Reconocí en lo anterior al típico argumento matemático, y nunca quise decir, como se ha supuesto, que todos los argumentos matemáticos pueden reducirse a una aplicación de este principio. Examinando estos argumentos de una manera más cercana, descubriríamos la aplicación de muchos otros principios similares, ofreciendo las mismas características esenciales. En esta categoría de principios, el de la inducción completa es únicamente el más simple de todos, y es por esa razón por la que lo elegí como un tipo.

El término *principio de inducción completa* que se ha adoptado no es justificable. Pero este método de razonamiento es, no obstante, una verdadera inducción matemática, y solamente difiere de la inducción ordinaria por su certeza.

IV. DEFINICIONES Y AXIOMAS

La existencia de tales principios representa una dificultad para los lógicos más implacables. ¿Cómo es que intentan escapar de ella? El principio de inducción completa, argumentan, no es un axioma propiamente dicho, o un juicio sintético *a priori*, sino simplemente la definición de número entero. De acuerdo con esto, es una

mera convención. Para poder discutir este punto de vista, será necesario hacer un minucioso examen de las relaciones entre definiciones y axiomas.

Primero nos referiremos a un artículo sobre definiciones matemáticas escrito por el señor Couturat y aparecido en *L' Enseignement mathématique*, una revista publicada por Gauthier-Villars y por Georg en Ginebra. Aquí encontramos una distinción entre *definición directa* y *definición por postulados*.

"La definición por postulados", dice el señor Couturat, "aplica no a una sola noción, sino a un sistema de nociones; consiste en enumerar las relaciones fundamentales que las unen, que hacen posible demostrar todas sus propiedades: estas relaciones son postulados…".

Si anteriormente hemos definido todas estas nociones con una excepción, entonces esta última será, por definición, el objeto que verifica estos postulados.

Así, ciertos axiomas indemostrables de las matemáticas no serán más que definiciones disfrazadas. Este punto de vista es a menudo legítimo, e incluso yo lo he admitido con respecto, por ejemplo, al postulado de Euclides.

Los otros axiomas de la geometría no resultan suficientes para definir la distancia por completo. Entonces la distancia será, por definición, la que, entre todas las magnitudes, satisface los otros axiomas, la que es de tal naturaleza que hace que el postulado de Euclides sea verdadero.

Pues bien, los lógicos admiten, para el principio de inducción completa, lo que yo admito para el postulado de Euclides, y no ven nada más en él que una definición disfrazada.

Pero para darnos este derecho, deben satisfacerse dos condiciones. John Stuart Mill solía decir que toda definición implica un axioma, a saber, aquel que afirma la existencia del objeto definido. Sobre este punto, ya no será el axioma una definición disfrazada sino, por el contrario, la definición será un axioma disfrazado. Mill entendía la palabra *existencia* en un sentido material y empírico; quería decir que, al definir un círculo, afirmamos que hay cosas redondas en la naturaleza.

Bajo esta forma, su opinión es inadmisible. Las matemáticas son independientes de la existencia de los objetos materiales. En éstas, la palabra *existe* sólo puede tener un significado: exención de contradicción. Así rectificada, la idea de Mill se vuelve precisa. Al definir un objeto, afirmamos que la definición no supone contradicción alguna.

Si tenemos, pues, un sistema de postulados, y si podemos demostrar que éstos no suponen contradicción, tendremos el derecho a considerarlos como representando la definición de una de las nociones que se encuentran entre ellos. Si no podemos demostrar esto, debemos admitir a la definición sin demostración, y entonces será un axioma. De tal suerte que si deseamos encontrar la definición detrás del postulado, descubriremos el axioma detrás de la definición.

Generalmente, para demostrar que una definición no supone contradicción alguna, procedemos *a partir de ejemplos*, e intentamos formar un ejemplo de un objeto que satisfaga la definición. Tomemos el caso de una definición por postulados. Si queremos definir una noción *A*, decimos que, por definición, *A* es cualquier objeto para el que ciertos postulados son ciertos. Si podemos demostrar directamente que todos estos postulados son verdaderos para un cierto objeto *B*, la definición estará justificada, y el objeto *B* será un *ejemplo* de *A*. Debemos asegurarnos de que estos postulados no sean contradictorios, ya que existen casos en donde son ciertos en seguida.

Pero tal demostración directa a partir de ejemplos no es siempre posible. Entonces, para establecer que los postulados no suponen contradicción, debemos describir todas las proposiciones que pueden deducirse de estos postulados considerados como premisas, y mostrar que, entre estas proposiciones, no hay dos de las cuales una sea la contradicción de otra. Si el número de estas proposiciones es finito, es posible una verificación directa; pero este caso no es frecuente y, además, es de poco interés.

Si el número de las proposiciones es infinito, ya no podemos hacer esta verificación directa, y debemos entonces recurrir a un proceso de demostración en donde, por lo general, nos veamos forzados a invocar aquel mismo principio de inducción completa que intentamos verificar.

He explicado una de las condiciones que los lógicos estaban obligados a satisfacer, *y más adelante veremos que no lo han hecho*.

V

Existe una segunda condición. Cuando ofrecemos una definición, nuestro propósito es hacer uso de ella.

De acuerdo con esto, encontraremos la palabra *definido* en el texto que sigue. ¿Tenemos el derecho a afirmar, del objeto representado por esta palabra, el postulado que sirvió como definición? Evidentemente sí, si la palabra ha preservado su

significado, si no le hemos asignado, implícitamente, un significado distinto. Ahora bien, a veces sucede lo anterior, y generalmente es difícil detectarlo. Debemos ver cómo es que ha sido introducida la palabra en nuestro texto, y si la puerta por la cual vino no implica, realmente, una definición distinta a la enunciada.

Esta dificultad se encuentra en todas las aplicaciones de las matemáticas. Las nociones matemáticas han adquirido una definición altamente purificada y exacta, y para el matemático puro toda vacilación ha desaparecido. Pero cuando las nociones son aplicadas - a las ciencias físicas, por ejemplo -, ya no estamos tratando con esta noción pura, sino con un objeto concreto que a menudo sólo es una cruda imagen de ella. Decir que este objeto satisface la definición, incluso de manera aproximada, equivale a enunciar una nueva verdad que ya no posee el carácter de un postulado convencional, y que la experiencia por sí sola puede establecer más allá de toda duda.

Pero, aun sin alejarnos de las matemáticas puras, encontramos la misma dificultad. Uno ofrece una sutil definición del número, y entonces, una vez dada, ya no se piensa en ella, porque, en realidad, no es esta definición la que ha enseñado a uno qué es un número, sino que esto se sabía desde mucho antes, y cuando se escribe la palabra *número* más adelante, se le otorga el mismo significado que le otorgaría cualquier otro. Para conocer cuál es este significado, y si en realidad es el mismo en esta frase y en aquella, debemos ver cómo es que se ha llegado a hablar acerca del número y a introducir la palabra en las dos frases. Por el momento, ya no explicaré mi punto sobre esta cuestión, ya que tendremos ocasión de regresar a él más adelante.

Así, tenemos una palabra a la que, explícitamente, le hemos dado una definición *A*. Después procedemos a hacer uso de ella en nuestro texto en una forma en la que, implícitamente, supone otra definición *B*. Es posible que estas dos definiciones puedan designar al mismo objeto, pero tal es el caso de una nueva verdad que debe ser, o bien demostrada, o bien admitida como un axioma independiente.

Más adelante veremos que los lógicos tampoco han satisfacido esta segunda condición.

VI

Las definiciones de número son muy numerosas y variadas, y ni siquiera intentaré enumerar sus nombres y autores. No debe sorprendernos que haya tantas; si cualquiera de ellas fuese satisfactoria, no tendríamos nuevas. Si cada filósofo que se ha aplicado a

la cuestión ha creído necesario inventar otra, es porque no estaba satisfecho con la de sus predecesores; y si no estaba satisfecho, es porque pensó haber detectado un *petitio principii*.[16]

Siempre he experimentado un profundo sentimiento de inquietud cuando leo los trabajos dedicados a este problema. Constantemente espero encontrarme con un *petitio principii*, y cuando no lo detecto de inmediato, temo no haber observado con suficiente cuidado.

El hecho es que es imposible ofrecer una definición sin enunciar una frase, y difícil enunciar una frase sin poner un nombre al número, o por lo menos la palabra *varios*, o por lo menos una palabra en plural. Entonces la pendiente se vuelve resbaladiza, y a cada momento estamos en peligro de caer en un *petitio principii*.

Me ocuparé, en lo que sigue, de las definiciones en donde este *petitio principii* se oculta más hábilmente.

VII. PASIGRAFÍA

El lenguaje simbólico creado por el señor Peano desempeña un papel muy importante en todas estas nuevas investigaciones. Es capaz, sin duda, de prestar algún servicio, pero me parece que el señor Couturat le concede una exagerada importancia que incluso debió sorprender al propio Peano.

El elemento esencial de este lenguaje consiste en ciertos signos algebraicos que representan las conjunciones: si, y, o, por lo tanto. Que estos signos sean convenientes es muy posible, pero de ahí a que estén destinados a cambiar la cara de toda la filosofía es muy distinto. Resulta difícil admitir que la palabra *si* adquiere, cuando es escrita como ɔ, una virtud que no posee cuando es escrita como *si*.

Esta invención de Peano fue primero llamada *pasigrafía*, es decir, el arte de escribir un tratado sobre matemáticas sin utilizar una sola palabra propia del lenguaje ordinario. Desde entonces, al habérsele conferido el título de *logística*, ha sido elevada a una dignidad más alta. Parece ser que la misma palabra se utiliza, en la École de Guerre (Escuela de Guerra), para designar al arte propio del oficial de intendencia, al arte de mover y acuartelar las tropas. Pero no debe temerse confusión alguna, y podemos ver, en seguida, que el nuevo nombre implica el diseño de revolucionar la lógica.

[16] Esto es, una *petición de principio*. Nota del Traductor.

Podemos observar al nuevo método en acción en un tratado matemático escrito por el señor Burali-Forti titulado *Una questione sui numeri transfiniti* (Una Investigación sobre Números Transfinitos), incluido en el volumen XI de los *Rendiconti del circolo matematico di Palermo* (Reportes del Círculo Matemático de Palermo).

Comenzaré diciendo que este tratado es muy interesante, y que si lo tomo aquí como un ejemplo, es precisamente porque es el más importante de todos los que se han escrito en este nuevo lenguaje. Además, los no iniciados pueden leerlo gracias a una traducción italiana interlineada.

Lo que dota de importancia a este tratado es el hecho de que presenta el primer ejemplo de aquellas antinomias que se encuentran en el estudio de los números transfinitos, y que se han convertido, durante los últimos años, en la desesperación de los matemáticos. El objetivo de este trabajo, dice el señor Burali-Forti, es mostrar que puede haber dos números transfinitos (ordinales), *a* y *b*, de tal suerte que *a* no es igual a, ni mayor que, ni menor que *b*.

El lector puede poner su mente en reposo. Para comprender las consideraciones que siguen, no se requiere saber qué es un número transfinito ordinal.

Ahora bien, Cantor había definitivamente probado que entre dos números transfinitos, así como entre dos números finitos, no puede haber otra relación que la igualdad o la desigualdad en una dirección o en la otra. Pero no es sobre esto sobre lo que quiero hablar, porque me alejaría mucho del tema. Sólo quiero ocuparme de la forma, y pregunto, de manera categórica, si de esta forma se obtiene algo ventajoso en el camino a la exactitud, y si, por lo tanto, compensa los esfuerzos que impone sobre el autor y el lector.

Para empezar, encontramos que el señor Burali-Forti define al número 1 de la siguiente manera:

$$1 = \iota T'\{Ko\frown(u,h) \in (u \in Uno\},$$

una definición eminentemente apta para ofrecer una idea del número 1 a aquellos que nunca hayan escuchado sobre él.

No comprendo lo suficientemente bien el idioma *peano* como para aventurarme a hacer una crítica de lo anterior, pero mucho me temo que esta definición contiene un *petitio principii*, viendo que en la primera mitad de ésta aparece la figura 1 y en la segunda la palabra *uno*.

Sea como fuere, el señor Burali-Forti comienza con esta definición y, después de un pequeño cálculo, llega a la ecuación

$$1 \in N, \tag{27}$$

que nos enseña que *uno* es un número.

Y como estamos con estas definiciones de los primeros números, diré que el señor Couturat también ha definido tanto al 0 como al 1.

¿Qué es el cero? Es el número de elementos en la clase nula. ¿Y cuál es la clase nula? La clase que contiene nada.

Definir al cero como nulo y a lo nulo como nada es realmente abusar del lenguaje, y así el señor Couturat ha introducido una mejora en su definición al escribir

$$0 = \iota\, \Lambda : \not\ni x = \Lambda . \supset . \Lambda = (x \in \not\ni x),$$

que significa, en español: cero es el número de objetos que satisfacen una condición que nunca se cumple. Pero como nunca significa *en ningún caso*, no veo que se haya hecho mucho progreso.

Me apresuro a añadir que la definición del número 1 ofrecida por el señor Couturat es más satisfactoria.

Uno, dice, en esencia, es el número de elementos de una clase en donde cualesquiera dos elementos son idénticos.

Es más satisfactoria, como dije, en el sentido de que, para definir 1, no utiliza la palabra *uno*; por otra parte, sí utiliza la palabra *dos*. Pero me temo que si le preguntásemos al señor Couturat qué es dos, se vería obligado a usar la palabra *uno*.

VIII

Regresemos ahora al tratado del señor Burali-Forti. Ya dije que sus conclusiones están en dirección opuesta a las de Cantor. Pues bien, un día recibí la visita del señor Hadamard, y la conversación giró sobre esta antinomia:

"¿No le parece", le dije, "que el razonamiento de Burali-Forti es irreprochable"?

"No", me respondió, "y, por otra parte, no tengo ninguna culpa por coincidir con Cantor. Además, Burali-Forti no tenía derecho a hablar de la totalidad de *todos* los números ordinales".

"Perdóneme, sí lo tenía, ya que siempre puede suponer que

$$\Omega = T'(N, \bar{\in} >).$$

Me gustaría saber quién puede impedírselo. ¿Y podemos decir que un objeto no existe cuando lo hemos llamado Ω?”

Fue totalmente inútil. Nunca lo pude convencer (además, habría sido desafortunado hacerlo, ya que él tenía razón). ¿Fue porque no hablé *peano* con suficiente elocuencia? Posiblemente, pero, entre nosotros, no lo pienso así.

Así, a pesar de todo este aparato pasigráfico, la cuestión sigue sin resolverse. ¿Qué prueba esto? Siempre que sea simplemente una cuestión de demostrar que uno es un número, la pasigrafía equivale a la tarea [de demostrarlo]; pero si se presenta una dificultad, si hay una antinomia a ser resuelta, la pasigrafía pierde todo su poder.

CAPÍTULO IV

LAS NUEVAS LÓGICAS

I. LA LÓGICA DE RUSSELL

Para poder justificar sus pretensiones, la lógica ha tenido que transformarse a sí misma. Así, hemos sido testigos del surgimiento de nuevas lógicas, siendo la más interesante la del señor Bertrand Russell. Parecería que ya no hay nada nuevo a ser escrito sobre lógica formal, como si Aristóteles hubiese ido al fondo real del asunto. Pero el campo que el señor Russell asigna a la lógica es infinitamente más extenso que el de la lógica clásica, y ha tenido éxito al expresar puntos de vista sobre este tema que resultan ser originales y, a veces, ciertos.

Para empezar, mientras que la lógica de Aristóteles fue, sobre todo, una lógica de clases - tomando como punto de partida la relación entre sujeto y predicado -, el señor Russell subordina la lógica de clases a la de las proposiciones. El silogismo clásico "Sócrates es un hombre", etc., da lugar al silogismo hipotético "Si *A* es verdad, *B* es verdad; ahora, si *B* es verdad, *C* es verdad, etc." Esta es, en mi opinión, una de las ideas más oportunas, porque el silogismo clásico es fácilmente reducible al hipotético, mientras que la transformación inversa no puede hacerse sin una dificultad considerable.

Pero eso no es todo. La lógica de proposiciones del señor Russell es el estudio de las leyes en concordancia con qué combinaciones se forman con las conjunciones *si*, *y*, *o*, y la negativa *no*. Esta es una extensión considerable de la lógica antigua. Las propiedades del silogismo clásico pueden ser extendidas, sin dificultad alguna, al silogismo hipotético, y en las formas de este último fácilmente podemos reconocer las formas escolásticas; recuperamos, pues, lo que es esencial en la lógica clásica. Pero la teoría del silogismo sigue siendo sólo la sintaxis de la conjunción *si*, y quizá de la [conjunción] negativa.

Al añadir otras dos conjunciones, *y* y *o*, el señor Russell inaugura un nuevo campo de la lógica. Los signos *y* y *o* siguen las mismas leyes que los dos signos $\times$ y +, es decir, las leyes conmutativas, asociativas, y distributivas. De esta forma, *y* representa la multiplicación lógica, mientras que *o* representa la adición lógica. Esto, de nuevo, es sumamente interesante.

El señor Russell llega a la conclusión de que una proposición falsa de cualquier tipo involucra a todas las otras proposiciones, ya sean ciertas o falsas. El señor Couturat dice que esta conclusión podría parecer paradójica a primera vista, pero uno sólo tiene que corregir un trabajo matemático mal hecho para reconocer qué tan cierta es la visión del señor Russell. A aquel que corrige este tipo de trabajos a menudo le supone un esfuerzo enorme encontrar la primera ecuación falsa, pero, una vez obtenida, no es más que un juego de niños ir acumulando los resultados más sorprendentes, algunos que incluso son correctos.

II

Podemos ver cómo esta nueva lógica resulta ser mucho más fecunda que la clásica. Los símbolos se han multiplicado y admiten varias combinaciones *que ya no tienen un número limitado*. ¿Tenemos algún derecho a otorgarle a la palabra *lógica* esta extensión de significado? Sería ocioso ocuparnos de esta cuestión y reñir con el señor Russell simplemente por las palabras empleadas. Le concederemos lo que pide, pero no debe sorprendernos encontrar que ciertas verdades que han sido declaradas como irreductibles a la lógica, en el viejo sentido de la palabra, se hayan vuelto reductibles a la lógica en este nuevo sentido, lo que es muy distinto.

Hemos introducido un gran número de nuevas nociones, y no son simples combinaciones de las viejas. Más aún, el señor Russell no se engaña sobre este punto, y no sólo al principio de su primer capítulo - a saber, su lógica de proposiciones -, sino también al principio de su segundo y tercer capítulos - a saber, su lógica de clases y relaciones -, introduce nuevas palabras que declara como indefinibles.

Y esto sigue sin ser todo. De manera similar, introduce principios que declara como indemostrables. Pero estos principios indemostrables son apelaciones a la intuición, juicios sintéticos *a priori*. Los consideramos como intuitivos cuando los encontramos enunciados, de manera más o menos explícita, en los tratados de matemáticas. ¿Han alterado su carácter porque se ha extendido el significado de la palabra *lógica*, y porque ahora los encontramos en un libro titulado *Tratado de Lógica*? *No han cambiado de naturaleza, sino únicamente de posición*.

III

¿Podría considerarse a estos principios como definiciones disfrazadas? Para que sea así, requerimos ser capaces de demostrar que no suponen contradicción alguna. Debemos establecer que, sin importar qué tan lejos persigamos las series de deducciones, nunca estaremos en peligro de contradecirnos a nosotros mismos.

Podemos intentar argumentar como sigue. Podemos verificar el hecho de que las operaciones de la nueva lógica, aplicadas a premisas libres de contradicción, sólo pueden producir consecuencias igualmente libres de contradicción. Si entonces, después de n operaciones, no hemos encontrado contradicción alguna, ya no la encontraremos después de $n+1$. Por consiguiente, es imposible que haya un momento en donde *comience* una contradicción, lo que muestra que nunca la encontraremos. ¿Tenemos el derecho a argumentar de esta forma? No, porque esto sería hacer una inducción completa, y no debemos olvidar que *aún no conocemos el principio de inducción completa*.

Por lo tanto, no tenemos derecho a considerar estos axiomas como definiciones disfrazadas, y solamente nos queda un camino. Cada uno de estos axiomas, lo admitimos, es un nuevo acto de intuición. Esto es más o menos, creo, lo que el señor Russell y el señor Couturat piensan.

Así, cada una de las nueve nociones indefinibles y veinte proposiciones indemostrables (estoy seguro de que, si hubiese hecho la cuenta, encontraría una o dos más) que forman las bases de la nueva lógica - de la lógica en el sentido amplio - presupone un nuevo e independiente acto de intuición. ¿Y por qué no deberíamos llamarlo un verdadero juicio sintético *a priori*? Sobre este punto, todo mundo parece convenir, pero lo que clama el señor Russell, *y lo que me parece dudoso, es que, después de todas estas apelaciones a la intuición, habremos terminado: ya no tendremos más que hacer, y seremos capaces de construir toda la matemática sin introducir un único elemento nuevo*.

IV

Al señor Couturat le gusta repetir que esta nueva lógica es totalmente independiente de la idea de número. No me entretendré contando en cuántos casos su declaración

contiene adjetivos relativos al número, tanto cardinal como ordinal, o a adjetivos indefinidos tales como *varios*. No obstante, citaré algunos ejemplos:

"El producto lógico de *dos* o *varias* proposiciones es…"

"Todas las proposiciones son susceptibles de *dos* valores únicamente, verdad o falsedad".

"El producto relativo de *dos* relaciones es una relación".

"Una relación se establece entre *dos* términos".

A veces esta dificultad no sería imposible de evadir, pero otras es esencial. Una relación es incomprensible sin dos términos, y es imposible tener la intuición de una relación sin tener, al mismo tiempo, la intuición de sus dos elementos, y sin observar que son dos, ya que, para que una relación sea concebible, deben ser dos y sólo dos.

V. ARITMÉTICA

Llegamos ahora a lo que el señor Couturat llama *teoría ordinal*, que constituye la base de la aritmética propiamente dicha. El señor Couturat comienza por enunciar los cinco axiomas de Peano (que resultan ser independientes uno de otro, tal como el propio señor Peano y el señor Padoa han demostrado):

1. Cero es un número entero.
2. Cero no es el consecuente de ningún número entero.
3. El consecuente de un número entero es un número entero. A lo que sería bueno añadir: todo número entero tiene un consecuente.
4. Dos números enteros son iguales si sus consecuentes son iguales.

El quinto axioma es el principio de inducción completa.

El señor Couturat considera estos axiomas como definiciones disfrazadas; constituyen la definición, a partir de postulados, del cero, del "consecuente", y del número entero.

Pero hemos visto que, para que una definición por postulados sea aceptada, debemos ser capaces de establecer que no supone contradicción alguna. ¿Es este el caso aquí? En absoluto.

La demostración no puede llevarse a cabo *a partir de ejemplos*. No podemos seleccionar una porción de los *números enteros* - por ejemplo, los tres primeros - y demostrar que satisfacen la definición.

Si tomamos la serie 0, 1, 2, inmediatamente vemos que satisface los axiomas 1, 2, 4, y 5; pero para que satisfaga el axioma 3, es además necesario que 3 sea un número

entero, y, consecuentemente, que la serie 0, 1, 2, 3 satisfaga los axiomas. Podemos comprobar que satisface los axiomas 1, 2, 4, y 5, pero el axioma 3 requiere, además, que 4 sea un número entero, y que la serie 0, 1, 2, 3, 4 satisfaga los axiomas, y así indefinidamente.

Es, por tanto, imposible demostrar los axiomas para algunos números enteros sin demostrarlos para todos, y por ello debemos renunciar a la demostración por ejemplos.

Es necesario, pues, tomar todas las consecuencias de nuestros axiomas y observar si contienen alguna contradicción. Si el número de estas consecuencias fuese finito, esto sería fácil; pero su número es infinito (ya que son el todo de las matemáticas, o por lo menos el todo de la aritmética).

¿Qué vamos a hacer entonces? Quizá, si nos impulsamos hacia él, podríamos repetir el razonamiento expuesto en la sección III. Pero, como ya he dicho, *este razonamiento es una inducción completa*, y es precisamente el principio de inducción completa el que estamos obligados a justificar.

VI. LA LÓGICA DE HILBERT

Llegamos ahora a uno de los trabajos más importantes de Hilbert, dirigido al Congreso Matemático de Heidelberg, cuya traducción al francés fue hecha por el señor Pierre Boutroux, aparecida en *L' Enseignement mathématique*, y cuya traducción al inglés, hecha por el señor Halsted, apareció en *The Monist*. En este trabajo - en el que encontramos el pensamiento más profundo - el autor persigue un objetivo similar al del señor Russell, aunque diverge de su predecesor en muchos puntos.

"Sin embargo", dice Hilbert, "si miramos de cerca, reconocemos que en los principios lógicos, tal como comúnmente se presentan, se encuentran ya implícitas ciertas nociones aritméticas; por ejemplo, la noción del todo y, hasta cierto punto, la noción de número. Así, nos encontramos atrapados en un círculo, y es por eso que me parece necesario, si es que deseamos evitar toda paradoja, desarrollar los principios de la lógica y de la aritmética de manera simultánea".

Hemos visto arriba que lo que el señor Hilbert dice de los principios de la lógica, *tal como comúnmente se presentan*, aplica igualmente a la lógica del señor Russell. Para el señor Russell, la lógica es anterior a la aritmética; para el señor Hilbert son "simultáneas". Más adelante encontraremos otras diferencias incluso más profundas,

pero la iremos notando a medida que ocurran. Prefiero seguir el desarrollo del pensamiento de Hilbert paso a paso, citando los pasajes más importantes literalmente.

"Tengamos primero en cuenta al objeto 1". Debemos darnos cuenta que, al actuar así, de ninguna forma implicamos la noción de número, porque claramente se entiende que aquí 1 no es nada más que un símbolo, y que no nos preocupa, en absoluto, conocer su significado. "Los grupos formados con este objeto, dos, tres, o varias veces repetido…" Esta vez el caso se altera bastante, porque si introducimos las palabras *dos*, *tres*, y sobre todo *varias*, introducimos la noción de número, y entonces la definición de número entero finito que encontramos más adelante llega un poco tarde. El autor era demasiado cauteloso como para no percibir este *petitio principii*. Y así, al final de su trabajo, busca llevar a cabo una verdadera remienda.

Hilbert entonces introduce dos simples objetos, 1 y =, y se imagina todas las combinaciones entre estos dos objetos, todas las combinaciones entre sus combinaciones, y así sucesivamente. No hace falta decir que debemos olvidarnos del significado ordinario de estos dos signos, y no atribuir ninguno a los mismos. Después divide estas combinaciones en dos clases, aquella de las entidades y aquella de las no entidades y, hasta nueva orden, esta división es totalmente arbitraria. Toda proposición afirmativa nos enseña que una combinación pertenece a la clase de las entidades, y cada proposición negativa nos enseña que cierta combinación pertenece a la clase de las no entidades.

VII

Ahora debemos hacer notar una diferencia de gran importancia. Para el señor Russell, un objeto ocasional, que él designa por *x*, es un objeto absolutamente indeterminado, acerca del cual no asume nada. Para Hilbert es una de aquellas combinaciones formadas con los símbolos 1 y =, y no permitiría la introducción de nada excepto de combinaciones de objetos ya definidos. Más aún, Hilbert formula su pensamiento de la manera más concisa posible, y pienso que debo reproducir su exposición *in extenso*: "Los indeterminados que figuran en los axiomas (en lugar del "algún" o del "todo" de la lógica ordinaria) representan, exclusivamente, el todo de los objetos y combinaciones que ya hemos adquirido en el estado actual de la teoría, o que estamos en camino de introducir. Por lo tanto, cuando deducimos proposiciones de los axiomas bajo consideración, son sólo estos objetos y estas combinaciones las que tenemos derecho a

sustituir por los indeterminados. Tampoco debemos olvidar que cuando incrementamos el número de los objetos fundamentales, los axiomas, a su vez, adquieren una nueva extensión y, en consecuencia, deben ser puestos a prueba nuevamente y, si es necesario, deben ser modificados".

El contraste con el punto de vista del señor Russell es absoluto. De acuerdo con este último filósofo, podemos sustituir, por *x*, no solamente objetos ya conocidos, sino cualquier cosa. Russell es fiel a este punto de vista, que no es otro que el de la comprensión. Comienza con la idea general de entidad, y la enriquece más y más, incluso mientras la restringe, al otorgarle nuevas cualidades. Hilbert, por el contrario, únicamente reconoce como entidades posibles a combinaciones de objetos ya conocidos, de tal suerte que (buscando sólo en un lado de su pensamiento) podríamos decir que adopta el punto de vista de la extensión.

VIII

Procedamos ahora a la exposición de las ideas de Hilbert. Él introduce dos axiomas que enuncia en su lenguaje simbólico, pero que significan, en el lenguaje de los no iniciados como nosotros, que cada cantidad es igual a sí misma, y que cada operación sobre dos cantidades idénticas produce resultados idénticos. Así establecidos, [los axiomas] son evidentes, pero tal exposición de los mismos no representa, fielmente, el pensamiento de Hilbert. Para él, las matemáticas sólo deben combinar símbolos puros, y un verdadero matemático debe basar su razonamiento sobre ellos sin preocuparse por su significado. Pero para poder justificar esta definición, es necesario mostrar que estos dos axiomas no conducen a contradicción alguna.

Para este propósito, Hilbert hace uso del razonamiento de la Sección III, aparentemente sin percibir que está llevando a cabo una inducción completa.

IX

La parte final del tratado del señor Hilbert es completamente enigmática, y no moraré en ella. Está repleta de contradicciones, y uno siente que el autor es vagamente consciente del *petitio principii* del que ha sido culpable, y que en vano trata de cubrir las grietas de su razonamiento.

¿Qué significa esto? Significa que *cuando viene a demostrar que la definición del número entero a partir del axioma de la inducción completa no supone contradicción alguna, el señor Hilbert se descompone, tal como ya lo hicieron el señor Russell y el señor Couturat, porque la dificultad es inmensa*.

X. GEOMETRÍA

La geometría, dice el señor Couturat, es un vasto cuerpo de doctrina en el cual no se entromete la inducción completa. Esto es verdad hasta cierto punto: no podemos decir que no se entromete en absoluto, pero sí que lo hace poco. Si nos referimos a la *Geometría Racional* del señor Halsted (Nueva York: John Wiley and Sons, 1904), fundada sobre los principios de Hilbert, encontramos el principio de inducción entrometiéndose, por primera vez, en la página 114 (a menos que, en realidad, no haya buscado con suficiente cuidado, lo que es muy posible).

De esta forma la geometría, que hace unos pocos años parecía ser el dominio en donde la intuición ejercía una influencia indiscutida, es hoy el campo en donde los lógicos parecen estar triunfando. Nada puede ofrecer una mejor medida de la importancia de los trabajos geométricos de Hilbert, y de la profunda impresión que han dejado sobre nuestras concepciones.

Pero no debemos engañarnos. *¿Cuál es, en realidad, el teorema fundamental de la geometría? Es que los axiomas de la geometría no suponen contradicción, y esto no puede demostrarse sin recurrir al principio de inducción*.

¿Cómo es que Hilbert demuestra este punto esencial? Lo hace apoyándose en el análisis y, a través de él, en la aritmética y, a través de ella, en el principio de inducción.

Si alguna otra demostración es algún día descubierta, aún será necesario apoyarse en este principio, ya que el número de las posibles consecuencias de los axiomas que debemos mostrar como no contradictorios es infinito.

XI. CONCLUSIÓN

Nuestra conclusión es, antes que nada, que *el principio de inducción no puede ser considerado como la definición disfrazada del número entero*.

Aquí hay tres verdades:

El principio de inducción completa;

El postulado de Euclides;

La ley física por la cual el fósforo se funde a 44° centígrados (expresada por el señor Le Roy).

Y nosotros decimos: estas son tres definiciones disfrazadas (la primera del número entero, la segunda de la línea recta, y la tercera del fósforo).

Lo admito para la segunda, pero no así para las otras dos, y debo explicar la razón de esta aparente inconsistencia.

En primer lugar, hemos visto que una definición sólo es aceptable si se establece que no supone contradicción alguna. También hemos mostrado que, en el caso de la primera definición, esta demostración es imposible, mientras que en el caso de la segunda, por el contrario, recordamos que Hilbert ha ofrecido una demostración completa.

En cuanto a la tercera definición, es claro que no supone contradicción. ¿Pero significa esto que tal definición garantiza, como debería, la existencia del objeto definido? Aquí ya no estamos ocupados de las ciencias matemáticas, sino de las físicas, y la palabra *existencia* ya no tiene el mismo significado: ya no significa ausencia de contradicción, sino existencia objetiva.

Esta ya es una razón para la distinción que hago entre los tres casos, pero hay una más. En las aplicaciones que de estas tres nociones debemos hacer, ¿se presentan, por sí mismas, como definidas por estos tres postulados?

Las posibles aplicaciones del principio de inducción son innumerables. Tomemos, por ejemplo, una de las que hemos expuesto arriba, en donde se busca establecer que una colección de axiomas no puede llevar a una contradicción. Para este propósito, consideramos una de las series de silogismos que pueden ser seguidas, comenzando con estos axiomas como premisas.

Cuando hemos completado el silogismo *n*, vemos que podemos formar uno más, que será el silogismo $n+1$. Así, el número *n* sirve para contar una serie de operaciones sucesivas; es un número, pues, que puede obtenerse a partir de adiciones sucesivas. Por consiguiente, es un número desde el cual podemos regresar a una unidad a partir de *sustracciones sucesivas*. Es evidente que no podríamos hacer esto si tuviésemos que $n = n-1$, porque entonces la sustracción siempre nos daría el mismo número. De tal suerte que la manera en que hemos llegado a considerar este número *n* supone una definición del número entero finito, y esta definición es como sigue: *un número entero*

finito es aquel que puede obtenerse a partir de adiciones sucesivas, y es tal que n no es igual a $n-1$.

Establecido esto, ¿qué es lo que procedemos a hacer? Mostramos que, si no ha ocurrido contradicción alguna hasta el silogismo *n*, tampoco ocurrirá en el $n+1$, y entonces concluimos que nunca ocurrirá. Decimos tener derecho a concluir de esta forma porque los números enteros son, por definición, aquellos para los cuales tal razonamiento es legítimo. Pero esto supone otra definición del número entero, a saber: *un número entero es aquel sobre el que puede razonarse por recurrencia*. En especie, es aquel sobre el que podemos establecer que, si la ausencia de contradicción en el momento de la ocurrencia de un silogismo cuyo número es un número entero conlleva la ausencia de contradicción en el momento de la ocurrencia del silogismo cuyo número es el siguiente número entero, entonces no debemos temer contradicción alguna para cualesquiera de los silogismos cuyos números son números enteros.

Las dos definiciones no son idénticas. Son equivalentes, sin duda, pero sólo en virtud de un juicio sintético *a priori*; no podemos pasar de una a la otra a partir de procesos puramente lógicos. Consecuentemente, no tenemos derecho a adoptar la segunda [definición] después de haber introducido al número entero por un camino que presupone la primera [definición].

Por el contrario, ¿qué sucede en el caso de la línea recta? Ya he explicado esto tanto que siento un poco de titubeo al repetirme una vez más. Me contentaré con un breve resumen de mi pensamiento.

Aquí no tenemos, como en el caso previo, dos definiciones equivalentes lógicamente irreducibles una a la otra. Solamente tenemos una definición expresable en palabras. Podría decirse que hay otra definición que sentimos sin ser capaces de enunciar, porque tenemos la intuición de una línea recta, o porque nos podemos imaginar una línea recta. Pero, en primer lugar, no podemos imaginarla en un espacio geométrico, sino sólo en uno representativo; y entonces podemos, igualmente bien, imaginar objetos que poseen las otras propiedades de una línea recta, y no las que satisfacen al postulado euclidiano. Estos objetos son “líneas rectas no euclidianas” que, desde cierto punto de vista, no son entidades desprovistas de significado, sino círculos (verdaderos círculos del espacio verdadero) ortogonales a cierta esfera. Si, entre estos objetos igualmente susceptibles de ser imaginados, es a los primeros (las líneas rectas euclidianas) a los que llamamos líneas rectas, y no a los últimos (las líneas rectas no euclidianas), es ciertamente por una cuestión de definición.

Y si llegamos, por fin, al tercer ejemplo (la definición del fósforo), vemos que la verdadera definición sería: el fósforo es esta pieza de materia que veo ante mí en esta botella.

XII

Ya que estamos en el tema, diré unas cuantas cosas más. En lo que respecta al ejemplo del fósforo, dije: “Esta proposición es una verdadera ley física que puede ser verificada, ya que significa que todos los cuerpos que poseen todas las propiedades del fósforo, excepto su punto de fusión, se fusionan, tal como el fósforo lo hace, a 44° centígrados”. Se ha objetado que esta ley no es verificable, porque si llegásemos a verificar que dos cuerpos parecidos al fósforo se fusionan, uno a 44° y el otro a 50° centígrados, siempre podremos decir que hay, sin duda, además del punto de fusión, alguna otra propiedad por la que difieren.

Esto no fue exactamente lo que quise decir, y debí haber escrito: “todos los cuerpos que poseen tales y cuales propiedades en un número finito (esto es, las propiedades del fósforo establecidas en los libros de química, con la excepción de su punto de fusión) fusionan a 44° centígrados.”

Para hacer aún más clara la diferencia entre el caso de la línea recta y el del fósforo, haré una observación más. La línea recta tiene varias imágenes más o menos imperfectas en la naturaleza, cuyas principales son los rayos de luz y los ejes de rotación de un cuerpo sólido. Asumiendo que comprobamos que el rayo de luz no satisface al postulado euclidiano (al mostrar, por ejemplo, que una estrella tiene una paralaje negativa), ¿qué debemos hacer? ¿Debemos concluir que, como una línea recta es, por definición, la trayectoria de la luz, entonces no satisface la definición, o, por el contrario, que, como una línea recta, por definición, satisface el postulado, entonces el rayo de luz no es rectilíneo?

Ciertamente somos libres de adoptar cualquier definición y, consecuentemente, cualquier conclusión. Pero sería imprudente adoptar la primera, porque el rayo de luz probablemente satisface, en una manera más imperfecta, no sólo al postulado euclidiano, sino a las otras propiedades de la línea recta; porque, mientras se desvía de la recta euclidiana, se desvía, en todo caso, del eje de rotación de los cuerpos sólidos, que es otra imagen imperfecta de la línea recta; y, por último, porque es, sin duda, sujeta

a cambios, de tal suerte que tal y cual línea que ayer era recta ya no lo será así mañana si se ha alterado alguna circunstancia física.

Asumamos, ahora, que hemos conseguido descubrir que el fósforo no se fusiona a 44° sino a 43.9° centígrados. ¿Debemos concluir que, como el fósforo es, por definición, aquello que se fusiona a 44°, esta sustancia que hasta ahora hemos llamado fósforo no es en realidad tal, o, por el contrario, que el fósforo se fusiona a 43.9°? Aquí, de nuevo, somos libres de adoptar cualquier definición y, consecuentemente, cualquier conclusión; pero sería absurdo adoptar la primera, porque no podemos cambiar el nombre de una sustancia cada vez que añadamos un nuevo decimal a su punto de fusión.

XIII

En resumen: el señor Russell y el señor Hilbert han realizado un gran esfuerzo, y ambos han escrito trabajos repletos de perspectivas sumamente originales, profundas, y a menudo muy ciertas. Estos dos trabajos nos proporcionan mucho material para pensar, y hay mucho que podemos aprender de ellos. No unos pocos de sus resultados son sustanciales y están destinados a sobrevivir.

Pero decir que han resuelto la controversia entre Kant y Leibniz de manera definitiva y que han destruido la teoría kantiana de las matemáticas es evidentemente falso. No sé si en realidad imaginaron haberlo hecho, pero si es así, estaban equivocados.

CAPÍTULO V

LOS ÚLTIMOS ESFUERZOS DE LOS LÓGICOS

I

Los lógicos han intentado dar respuesta a las consideraciones anteriores. Para este propósito, se han visto obligados a transformar la lógica, y el señor Russell, en particular, ha modificado sus pareceres iniciales sobre ciertos puntos. Sin entrar a considerar los detalles de la controversia, me gustaría regresar a las dos cuestiones que son, en mi opinión, las más importantes. ¿Ha ofrecido la lógica prueba alguna de fecundidad e infalibilidad? ¿Es cierto que los lógicos pueden demostrar el principio de inducción completa sin recurrir a la intuición?

II. LA INFALIBILIDAD DE LA LÓGICA

En lo que respecta a la fecundidad de la lógica, me parece que el señor Couturat tiene las ilusiones más infantiles. La lógica, de acuerdo con él, presta "zancos y alas" al descubrimiento, y en la siguiente página dice: "*Han pasado diez años* desde que el señor Peano publicó la primera edición de su "Formulaire". ¿Qué? ¿Han tenido alas por diez años y aún no han volado?

Tengo una gran estima por el señor Peano, quien ha hecho cosas muy sutiles (por ejemplo, su curva que ocupa un área entera); pero, después de todo, no ha llegado mucho más lejos, o mucho más alto, o mucho más rápido, que la mayoría de los matemáticos sin alas, y pudo haber hecho todo, igual de bien, sobre la tierra.

Por otra parte, en la lógica no encuentro nada para el descubridor, excepto trabas. No nos ayuda, en absoluto, al buscar concisión; y si se requieren 27 ecuaciones para establecer que 1 es un número, ¿cuántas requerirá demostrar un teorema real? Si distinguimos, como lo hace el señor Whitehead, la *x* individual, la clase cuyo único miembro es *x*, a la que llamamos ιx, después la clase cuyo único miembro es la clase cuyo único miembro es *x*, a la que llamamos $\iota\iota x$, ¿podemos en realidad imaginar

que estas distinciones, sin importar qué tan útiles puedan resultar, facilitan enormemente nuestro progreso?

La lógica nos fuerza a decir todo lo que comúnmente damos por asumido, nos fuerza a ir paso a paso; quizá sea más segura, pero no más expeditiva.

No son alas lo que nos ha dado, sino andadores. Pero tenemos derecho a demandar que estos andadores nos guarden de caer; esta es su única excusa. Cuando una inversión no paga una alta tasa de interés, debe poseer, por lo menos, una garantía.

¿Debemos seguir las reglas de los lógicos ciegamente? Sí, porque de otra forma sería la intuición, por sí sola, la que nos permitiría distinguir entre tales reglas. Pero entonces éstas deben ser infalibles, porque solamente sobre una autoridad infalible podemos tener plena y ciega confianza. De acuerdo con esto, esto es una necesidad para los lógicos: deben ser infalibles o cesar de existir.

No tienen derecho a decirnos: "Cometemos errores, es cierto, pero ustedes también". Para nosotros, cometer errores es ciertamente una desgracia, una gran desgracia, pero para ustedes es la muerte.

Tampoco tienen derecho a decir: "¿La infalibilidad en la aritmética previene errores de adición?" Las reglas para calcular son infalibles, y aún así encontramos personas que cometen errores *por no aplicar estas reglas*. Pero una revisión de su cálculo mostrará, en seguida, dónde es que se perdieron. Aquí el caso es muy distinto. Los lógicos *han aplicado* sus reglas y, aún con todo, han llegado a contradicciones. Tan cierto es esto, que están preparando la alteración de estas reglas y "sacrificar la noción de clase". ¿Por qué alterarlas si eran infalibles?

"No estamos obligados", dirán los lógicos, "a resolver *hic et nunc*[17] todos los posibles problemas." No pedimos tanto como eso. Si, en vista de un problema, no se ofrece solución *alguna*, no tendríamos nada que decir; pero, por el contrario, los lógicos ofrecen *dos*, y estas dos soluciones son contradictorias. Consecuentemente, por lo menos una de ellas es falsa, y es esto lo que constituye un fracaso.

El señor Russell intenta reconciliar estas contradicciones, cosa que sólo puede llevarse a cabo, de acuerdo con él, "al restringir o incluso sacrificar la noción de clase". Y el señor Couturat, dando por contado el acierto de este intento, apunta: "Si los lógicos triunfan donde otros han fallado, el señor Poincaré sin duda recordará esta frase, y dará a la lógica el crédito de la solución."

[17] Locución latina que significa "aquí y ahora". Nota del Traductor.

Ciertamente no. La lógica existe, y tiene su propio código (que ya ha resultado en cuatro ediciones); o, más bien, este código es en sí la lógica. ¿Está preparándose el señor Russell para mostrar que por lo menos uno de estos dos argumentos contradictorios ha transgredido el código? En absoluto; se está preparando para alterar estas leyes y revocar cierto número de ellas. Si lo consigue, le daré el crédito a la intuición del señor Russell, y no a la lógica de Peano que habrá destruido.

III. LIBERTAD DE CONTRADICCIÓN

Ofrecí dos principales objeciones a la definición de número entero adoptada por los lógicos. ¿Cuál es la respuesta del señor Couturat a la primera de estas objeciones?

¿Cuál es el significado, en matemáticas, de la palabra *existir*? Significa, como dije, estar libre de contradicción. Esto es lo que el señor Couturat discute: "La existencia lógica", dice, "es una cosa muy distinta que ausencia de contradicción. Consiste en el hecho de que una clase no está vacía. Decir que algunos *a'* existen es, por definición, afirmar que la clase *a* no está vacía." Y, sin duda, asegurar que la clase *a* no está vacía es, por definición, afirmar que algunos *a'* existen. Pero una de estas afirmaciones está tan desprovista de significado como la otra si ambas no significan, o bien que podamos ver o tocar *a*, que es el significado dado a estas afirmaciones por los físicos o los naturalistas, o bien que podamos concebir un *a* sin involucrar contradicciones, que es el significado dado por los lógicos y los matemáticos a estas mismas afirmaciones.

En opinión del señor Couturat, no es la no contradicción la que prueba la existencia, sino la existencia la que prueba la no contradicción. Para establecer la existencia de una clase, debemos establecer, por consiguiente y *a partir de un ejemplo*, que hay un individuo perteneciente a tal clase. "Pero se dirá: ¿cómo demostramos la existencia de este individuo? ¿No es necesario que esta existencia sea establecida, para que podamos deducir la existencia de la clase de la cual forma parte? No es así. Tan paradójica como la afirmación pueda parecer, nunca demostramos la existencia de un individuo. Los individuos, por el mero hecho de ser individuos, siempre son considerados como existiendo. Nunca tenemos que declarar que un individuo existe, hablando en términos absolutos, sino solamente que existe en una clase." El señor Couturat encuentra paradójica su propia afirmación, y ciertamente no será el único en hacerlo. No obstante, su afirmación debe tener algún sentido, y éste es, sin duda, que la existencia de un individuo solo en el mundo, del que nada se afirma, no puede suponer

contradicción. Siempre que esté completamente solo, es evidente que no puede interferir con nadie. Pues bien, que esto sea así; admitiremos la existencia del individuo "hablando en términos absolutos", pero con él no tenemos nada que hacer. Todavía queda por demostrar la existencia del individuo "en una clase", y, para esto, debe probarse que la afirmación de que tal individuo pertenece a tal clase no es ni contradictoria por sí misma, ni con los otros postulados adoptados.

"En consecuencia", continúa el señor Couturat, "afirmar que una definición no es válida a menos que primero se pruebe que no es contradictoria, equivale a imponer una condición arbitraria e impropia." La demanda por la libertad de contradicción no podría formularse en términos más enfáticos o altivos. "En cualquier caso, el *onus probandi*[18] descansa en aquellos que piensan que estos principios son contradictorios." Los postulados se presumen como compatibles, así como un prisionero se presume como inocente hasta que se pruebe lo contrario.

Es innecesario añadir que no consiento esta reclamación. Pero, dirán los lógicos, la demostración que se nos exige resulta imposible, y no se nos puede pedir "apuntar a la Luna". Perdón, pero será imposible para ustedes, pero no para los que admitimos el principio de inducción como un juicio sintético *a priori*. Esto sería tan necesario para ustedes como para nosotros.

A fin de que se demuestre que un sistema de postulados no supone contradicción alguna, es necesario aplicar el principio de inducción completa. No sólo no hay nada "extraordinario" en este método de razonamiento, sino que es el único correcto. No resulta "inconcebible" que alguien lo haya usado alguna vez, y no es difícil encontrar ejemplos y precedentes de lo anterior. En mis escritos ya he citado dos, y fueron tomados del folleto de Hilbert. Él no es el único que ha hecho uso de tal principio, y aquellos que no lo han hecho han estado equivocados. Lo que reprocho a Hilbert no es que haya recurrido a él (un matemático nato como Hilbert no podría sino ver que se requiere una demostración, y que ésta es la única posible), sino que haya recurrido a él sin haber reconocido al razonamiento por recurrencia.

[18] Locución latina que significa "carga de la prueba". Nota del Traductor.

IV. LA SEGUNDA OBJECIÓN

He hecho notar un segundo error, cometido por los lógicos, en el escrito de Hilbert. Hoy Hilbert está excomulgado, y el señor Couturat ya no se considera un lógico. Me preguntará, por tanto, si he encontrado el mismo error en los lógicos más ortodoxos. No he visto alguno en las páginas que he leído, pero no sé si lo encontraría en las trescientas páginas que han escrito y que no deseo leer.

Sólo diré que cometerán tal error tan pronto como intenten llevar a cabo cualquier tipo de aplicación de la ciencia matemática. La eterna contemplación de su propio ombligo no es el único objeto de esta ciencia. Ésta tiene contacto con la naturaleza, y un día u otro entrará en tal contacto, y entonces será necesario sacudirse de las definiciones puramente verbales y ya no contentarnos con las palabras.

Regresemos al ejemplo del señor Hilbert. Todavía es una cuestión de razonamiento por recurrencia y de saber si un sistema de postulados no es contradictorio. El señor Couturat me dirá, sin duda, que tal caso no le concierne, pero quizá sí lo hará a aquellos que no clamen, como él hace, por la libertad de contradicción.

Deseamos establecer, sobre todo, que no nos encontremos con alguna contradicción después de un número particular de argumentos, un número tan grande como se quiera, siempre que sea finito. Para este propósito debemos aplicar el principio de inducción. ¿Debemos entender aquí por número finito a cada número al que aplique el principio de inducción? Evidentemente no, porque entonces nos encontraríamos con las consecuencias más extrañas.

Para tener derecho a establecer un sistema de postulados, debemos estar seguros de que no son contradictorios. Esta es una verdad admitida *por la mayoría de los científicos* (y hubiese dicho que por *todos* antes de leer el último artículo del señor Couturat). ¿Pero esto qué significa? ¿Significa que debemos estar seguros de no encontrarnos con alguna contradicción después de un número *finito* de proposiciones, siendo el número *finito*, por definición, aquel que posee todas las propiedades de una naturaleza recurrente de tal suerte que si una de estas propiedades faltase - si, por ejemplo, llegásemos a una contradicción -, deberíamos *estar de acuerdo* con decir que el número en cuestión no era finito?

En otras palabras, ¿queremos decir que debemos estar seguros de no encontrarnos con alguna contradicción con la condición de que acordemos detenernos justo en el momento en el que estemos por encontrarnos con una? La simple declaración de tal proposición es suficiente para condenarla.

Así, no sólo el razonamiento del señor Hilbert asume el principio de inducción, sino también que este principio nos es dado, no como una simple definición, sino como un juicio sintético *a priori*. Yo resumiría lo anterior de la siguiente manera:

:: Es necesaria una demostración.

:: La única demostración posible es la demostración por recurrencia.

:: Esta demostración está legitimada sólo si es admitido el principio de inducción, y si éste es considerado no como una definición sino como un juicio sintético.

V. LAS ANTINOMIAS CANTORIANAS

Ahora me centraré en examinar el nuevo tratado del señor Russell. Este tratado fue escrito con el objetivo de superar las dificultades surgidas por aquellas *antinomias cantorianas* sobre las cuales ya he hecho alusión. Cantor pensó posible construir una Ciencia del Infinito. Otros han avanzado más a lo largo del camino que abrió, pero muy pronto se encontraron con extrañas contradicciones. Estas antinomias son muy numerosas, pero las más célebres son:

1. La antinomia de Burali-Forti
2. La antinomia de Zermelo-König
3. La antinomia de Richard

Cantor había demostrado que los números ordinales (es una cuestión de números ordinales transfinitos, una nueva noción introducida por él) pueden ser arreglados en una serie lineal, es decir, que de dos números ordinales desiguales, siempre hay uno que es menor que otro. Burali-Forti demuestra lo contrario y, en realidad, como él dice, en esencia, si pudiésemos arreglar *todos* los números ordinales en una serie lineal, esta serie definiría un número ordinal que sería mayor que *todos* los otros, y al que podríamos después añadir 1 y así obtener otro número ordinal que sería aún mayor. Y esto es contradictorio.

Más tarde regresaremos a la antinomia de Burali-Forti, que es de una naturaleza un tanto distinta. La antinomia de Richard (*Revue générale des sciences*, junio 30, 1905) es como sigue. Consideremos todos los números decimales que pueden ser

definidos con la ayuda de un número finito de palabras. Estos números decimales forman un agregado *E*, y es fácil ver que este agregado es numerable (es decir, que es posible *enumerar* los números decimales de este agregado desde uno al infinito). Supongamos que se lleva a cabo tal numeración, y definamos un número *N* de la siguiente manera. Si el decimal *n* del número *n* del agregado *E* es

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ó 9,

el decimal *n* de *N* será

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 1, ó 1.

Como vemos, *N* no es igual al número *n* de *E*, y como *n* es cualquier número, *N* no pertenece a *E*, aun cuando *N* debería pertenecer a este agregado, ya que los hemos definido en un número finito de palabras.

Más adelante veremos que el señor Richard ha ofrecido, con mucha agudeza, la explicación de esta paradoja, y que esta explicación puede extenderse, *mutatis mutandis*[19], a otras paradojas de naturaleza similar. El señor Russell da cuenta de otra antinomia bastante divertida:

¿Cuál es el menor número entero que no puede definirse en una frase formada por menos de cien palabras en español?

Este número existe, y en realidad el número de números capaces de ser definidos por tal frase es evidentemente finito, porque el número de palabras de la lengua española no es infinito. Por tanto, entre estos números habrá uno que será menor que los otros.

Por otra parte, el número no existe, porque su definición supone una contradicción. El número, en realidad, se encuentra definido por la frase en cursivas, y ésta está formada por menos de cien palabras en español. Por definición, el número no debe ser capaz de ser definido por tal frase.[20]

VI. LA TEORÍA DEL ZIGZAG Y LA TEORÍA DE NO CLASES

¿Cuál es la actitud del señor Russell ante estas contradicciones? Después de analizar aquellas sobre las que ya he hablado, haber dado cuenta de otras, y después de haberlas puesto en una forma tal que recuerda a Epiménides, no duda en concluir lo que sigue:

[19] Locución latina que significa “cambiando lo que deba cambiarse”. Nota del Traductor.

[20] Evidentemente, en el texto original Poincaré no utiliza al idioma *español* para ejemplificar esta paradoja. Pero, sea como fuere, la paradoja es cierta para cualquier lenguaje cuyas palabras sean finitas. Nota del Traductor.

"Una función proposicional de una variable no siempre determina una clase."[21] Una "función proposicional" (esto es, una definición) o una "norma" puede ser "no predicativa". Y esto no significa que estas proposiciones no predicativas determinen una clase vacía o nula; tampoco significa que no haya valor de *x* que satisfaga la definición y pueda ser uno de los elementos de la clase. Los elementos existen, pero no pueden ser agrupados para formar una clase.

Pero esto es sólo el principio, y debemos saber cómo reconocer si una definición es o no predicativa. Para resolver este problema, el señor Russell vacila entre tres teorías, a las que llama

A. La teoría del zigzag.

B. La teoría de limitación de tamaño.

C. La teoría de no clases.

De acuerdo con la teoría del zigzag, "las definiciones (funciones proposicionales) determinan una clase cuando son lo suficientemente simples, y sólo no lo hacen cuando son complicadas y recónditas." Ahora bien, ¿quién decide si una definición puede considerarse como suficientemente simple para ser aceptable? A esta pregunta no recibimos respuesta, sino una franca confesión de impotencia. "Los axiomas en cuanto a qué funciones son predicativas tienen que ser excesivamente complicados, y no pueden recomendarse por una plausibilidad intrínseca. Este es un defecto remediable por un mayor ingenio, o con la ayuda de alguna distinción hasta ahora inadvertida. Pero hasta ahora, al intentar establecer axiomas para esta teoría, no he encontrado ningún principio rector excepto el evitar contradicciones."

Esta teoría, por tanto, sigue siendo muy oscura. En esta oscuridad hay solamente una tenue luz, y es la palabra *zigzag*. Lo que el señor Russell llama *zigzagueo* es, sin duda, este carácter especial que distingue el argumento de Epiménides.

De acuerdo con la teoría de limitación de tamaño, una clase no debe ser demasiado extensa. Podría ser, quizá, infinita, pero no debe ser demasiado infinita. Pero llegamos a la misma dificultad. ¿En qué preciso momento comenzará a ser demasiado extensa? Por supuesto esta dificultad no se resuelve, y el señor Russell pasa entonces a la tercera teoría.

---

[21] Esta cita y las siguientes son del artículo del señor Russell, "On some difficulties in the theory of transfinite numbers and order types", en *Proceedings of the London Mathematical Society*, Ser. 2, Vol. 4, Parte 1.

En la teoría de no clases toda mención a la palabra *clase* está prohibida, y la palabra debe ser reemplazada por varias paráfrasis. ¡Qué gran cambio para los lógicos que no hablan de otra cosa que de clases y de clases de clases! Toda la lógica debe rehacerse. ¿Podemos imaginar la apariencia de una página sobre esta lógica cuando todas las proposiciones que tengan que ver con la noción de clase hayan sido suprimidas? No habrá nada más que unos pocos sobrevivientes dispersos en medio de una página en blanco. *Apparent rari nantes in gurgite vasto*.[22]

Sea como fuere, comprendemos los titubeos del señor Russell por las modificaciones que están a punto de someter a los principios fundamentales que hasta ahora ha adoptado. Serán necesarios ciertos criterios para decidir si una definición es demasiado compleja o demasiado extensa, y estos criterios no pueden justificarse sino a partir de apelar a la intuición. Es, pues, hacia la teoría de no clases hacia donde el señor Russell, eventualmente, se inclina.

Sin embargo, la lógica debe rehacerse, y aún no se sabe cuánto de ella podrá salvarse. Es innecesario añadir que son el cantorismo y la lógica los que están en cuestión. Las matemáticas verdaderas, las matemáticas que son de algún uso, podrán continuar desarrollándose de acuerdo con sus propios principios, sin tomar atención a las tempestades que se desencadenen. Paso a paso, alcanzará sus acostumbradas conquistas, tan decisivas que nunca deben ser abandonadas.

VII. LA VERDADERA SOLUCIÓN

¿Cómo es que debemos escoger entre estas distintas teorías? Me parece que la solución la contiene la carta del señor Richard mencionada antes, y que se encuentra en la *Revue générale des sciences* del 30 de junio de 1905. Después de establecer la antinomia que he llamado la antinomia de Richard, ofrece una explicación de la misma.

Refirámonos de nuevo a lo que se ha dicho sobre esta antinomia en la sección V de este capítulo. *E* es el agregado de *todos* los números que pueden ser definidos a partir de un número finito de palabras, *sin introducir la noción del propio agregado E*, porque de otra forma la definición de *E* contendría un círculo vicioso, ya que no podemos definir *E* a partir del propio agregado *E*. También hemos definido a *N* a partir de un

[22] Esto significa algo así como “nadadores dispersos en el vasto abismo”. Es una frase tomada de Virgilio, y utilizada por éste para describir el naufragio de la flota troyana de Eneas. Nota del Traductor.

número finito de palabras, es cierto, pero sólo con la ayuda de la noción del agregado *E*, y esa es la razón por la cual *N* no forma parte de *E*.

En el ejemplo elegido por el señor Richard, la conclusión se presenta con una evidencia completa, y ésta se vuelve lo más evidente en una referencia al texto real de la carta. Pero la misma explicación sirve para las otras antinomias, como puede fácilmente verificarse.

Así, *las definiciones que deben ser consideradas como no predicativas son aquellas que contienen un círculo vicioso*. Los ejemplos de arriba resultan suficientes para mostrar, claramente, lo que quiero decir con esto. ¿Es a esto a lo que el señor Russell llama *zigzagueo*? Simplemente hago la pregunta sin responderla.

VIII. LAS DEMOSTRACIONES DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN

Ahora examinaremos las así llamadas demostraciones del principio de inducción, y, en particular, la del señor Whitehead y la del señor Burali-Forti. Primero hablaremos de la demostración del primero, aprovechando algunas nuevas denominaciones felizmente introducidas por el señor Russell en su último tratado.

Llamaremos *clase recurrente* a cada clase de números que incluya al cero, y que también incluya a $n+1$ si incluye a *n*. Llamaremos *número inductivo* a cada número que forme una parte de *todas* las clases recurrentes. ¿Sobre qué condición será esta última definición, que desempeña un papel esencial en la demostración de Whitehead, "predicativa" y, consecuentemente, aceptable?

Siguiendo lo que se ha dicho hasta ahora, debemos entender por *todas* las clases recurrentes todas aquellas cuya definición no contenga la noción de número inductivo, porque de otra forma estaríamos involucrándonos en el círculo vicioso que produjo las antinomias. Ahora bien, *Whitehead no ha tomado esta precaución*.

El argumento de Whitehead es, por lo tanto, vicioso; es el mismo que condujo a las antinomias. Fue ilegítimo cuando produjo resultados falsos, y sigue siendo ilegítimo ahora que conduce, por casualidad, a un resultado cierto.

Una definición que contiene un círculo vicioso no define nada. No tiene ninguna utilidad decir que estamos seguros, sea cual sea el significado dado a nuestra definición, de que hay por lo menos un cero que pertenece a la clase de números inductivos. No es una cuestión de saber si esta clase esta vacía, sino si puede ser rígidamente delimitada.

Una “clase no predicativa” no es una clase vacía, sino una clase con límites inciertos. Es innecesario añadir que esta objeción particular no invalida las objeciones generales que aplican a todas las demostraciones.

IX

El señor Burali-Forti ha ofrecido otra demostración en su artículo “Le classi finite” (*Atti di Torino*, Vol. XXXII), aunque se ha visto obligado a admitir dos postulados:

El primero es que siempre existe, por lo menos, una clase infinita.

El segundo está planteado así:

$$u \in \mathrm{K}(\mathrm{K} - \iota\Lambda) . \supset . u < v'u$$

El primer postulado no es más evidente que el principio a ser demostrado. El segundo no es solamente no evidente, sino falso, tal como ha mostrado el señor Whitehead, y como, por otra parte, incluso el estudiante más común podría haber comprobado, de un vistazo y si el axioma hubiese sido expresado en un lenguaje inteligible, ya que significa: el número de combinaciones que pueden formarse con varios objetos es menor que el número de tales objetos.

X. EL AXIOMA DE ZERMELO

En una célebre demostración, el señor Zermelo se basa en el siguiente axioma:

En un agregado de cualquier tipo (o incluso en cada uno de los agregados de un agregado de agregados) siempre podemos seleccionar un elemento *al azar* (incluso si el agregado de agregados contiene un infinito de agregados).

Este axioma ha sido aplicado miles de veces sin haber sido establecido, pero, una vez que fue establecido, surgieron las dudas. Algunos matemáticos, como el señor Borel, lo rechazaron resueltamente, mientras que otros lo admitieron. Veamos qué es lo que piensa el señor Russell, de acuerdo con su último artículo. En sentido estricto, no pronuncia opinión alguna, pero sus consideraciones son muy sugestivas.

Para empezar con un ejemplo pintoresco, supongamos que tenemos tantos pares de botas como haya números enteros, de tal suerte que podemos numerar *los pares* del 1 al infinito. ¿Cuántas botas tendremos? ¿Será el número de botas igual al número de pares? Lo será si, en cada par, la bota derecha es distinguible de la izquierda, porque entonces, en realidad, será suficiente con dar el número $2n-1$ a la bota derecha del par

n, y el número $2n$ a la bota izquierda del par *n*. Pero no será así si la bota derecha es similar a la izquierda, porque entonces tal operación se vuelve imposible, a menos que admitamos el axioma de Zermelo, porque en tal caso podemos elegir de cada par de botas y *al azar*, la bota que consideremos como derecha.[23]

XI. CONCLUSIONES

Una demostración realmente basada en los principios de la lógica analítica estará compuesta por una sucesión de proposiciones. Algunas de éstas, que servirán como premisas, serán identidades o definiciones, mientras que otras serán deducidas de las primeras paso a paso. Pero aunque la conexión entre cada proposición y la subsiguiente pueda comprenderse de inmediato, no resulta obvio, de un vistazo, cómo ha sido posible pasar de la primera a la última, que podríamos estar tentados a ver como una nueva verdad. Pero si sucesivamente remplazamos las distintas expresiones empleadas por sus respectivas definiciones, y si llevamos esta operación hasta el límite más lejano posible, al final no quedará nada excepto identidades, de tal forma que todo se reducirá a una inmensa tautología. La lógica, por tanto, sigue siendo estéril, a menos que sea fertilizada por la intuición.

Esto es lo que escribí antes. Los lógicos, en cambio, aseguran lo contrario, e imagina haberlo probado habiendo demostrado, eficazmente, nuevas verdades. ¿Pero qué mecanismo han empleado?

¿Por qué es que, al aplicar a sus argumentos el procedimiento que recién he descrito, es decir, al remplazar los términos definidos por sus definiciones, no vemos que se fundan en identidades como los argumentos ordinarios? Es porque el procedimiento no es aplicable a ellos. ¿Y por qué? Porque sus definiciones son no predicativas, y presentan aquel tipo de círculo vicioso oculto que señalé antes, y las definiciones no predicativas no pueden ser sustituidas por el término *definido*. Bajo estas condiciones, *la lógica ya no es estéril, sino que engendra antinomias*.

Es la creencia en la existencia de un infinito real la que ha dado lugar a estas definiciones no predicativas. Me tengo que explicar. En estas definiciones, encontramos la palabra *todos*, tal como vimos en los ejemplos citados arriba. La palabra *todos* tiene un significado muy preciso cuando se refiere a un número finito de objetos, pero para

[23] O como la izquierda. Nota del Traductor.

que tenga un significado preciso cuando el número de los objetos es infinito, es necesario que exista un infinito real. De otra forma, *todos* estos objetos no pueden ser concebidos como existentes antes de su definición, y entonces, si la definición de una noción *N* depende de *todos* los objetos *A*, aquella podría estar contaminada por el círculo vicioso si entre los objetos *A* hay uno que no puede ser definido sin introducir la propia noción *N*.

Las reglas de la lógica formal simplemente expresan las propiedades de todas las clasificaciones posibles. Pero para que sean aplicables, es necesario que estas clasificaciones sean inmutables y no requieran ser modificadas en el transcurso del argumento. Si únicamente tenemos que clasificar un número finito de objetos, es fácil preservar estas clasificaciones sin cambio. Si el número de los objetos es indefinido, esto es, si constantemente tendemos a encontrar objetos nuevos e imprevistos surgiendo, bien podría suceder que la aparición de un nuevo objeto nos obligue a modificar la clasificación, y es así que estamos expuestos a las antinomias.

No hay un infinito real. Los cantorianos olvidaron esto, y así cayeron en contradicciones. Es cierto que el cantorismo ha sido útil, pero eso era cuando se aplicaba a un problema real, cuyos términos estuviesen claramente definidos, y entonces era posible avanzar sin temor al peligro.

Como los cantorianos, los lógicos han olvidado este hecho, y se han encontrado con las mismas dificultades. Pero es una cuestión de si tomaron este camino por accidente o por necesidad.

Desde mi punto de vista, no hay duda sobre lo anterior: la creencia en un infinito real es esencial a la lógica russelliana, y esto es exactamente lo que la distingue de la lógica hilbertiana. Hilbert adopta el punto de vista de la extensión precisamente para evitar las antinomias cantorianas. Russell toma el punto de vista de la comprensión, y, consecuentemente para él, el género es anterior a la especie, y el *summum genus*[24] es anterior a todo. Esto no supondría dificultad alguna si el *summum genus* fuese finito, pero es infinito, y entonces es necesario poner lo infinito ante lo finito, es decir, considerar al infinito como real.

Y no solamente tenemos clases infinitas. Cuando pasamos del género a la especie al restringir el concepto por nuevas condiciones, el número de estas condiciones

[24] El *summum genus* es el género más extensivo. Es el género bajo el cual caen *todos* los objetos. Nota del Traductor.

sigue siendo infinito, porque por lo general expresan que el objeto bajo consideración es, de tal y cual forma, una relación con todos los objetos de una clase infinita.

Pero todo esto ya es historia. El señor Russell se ha dado cuenta de todos estos peligros y reconsiderará la cuestión. Cambiará todo, y debemos comprender claramente que está preparando no solamente introducir nuevos principios que permitan operaciones antes prohibidas, sino también que prohíban operaciones antes consideradas legítimas. No está contento con adorar lo que alguna vez quemó, pero ahora va a quemar lo que alguna vez adoró, lo que es mucho más serio. No está añadiendo una nueva ala al edificio, sino minando sus fundamentos.

La vieja lógica está muerta, y tan cierto es esto, que la teoría del zigzag y la teoría de no clases ya están disputando su sucesión. Esperaremos hasta que la nueva lógica exista antes de intentar juzgarla.

PARTE III

LA NUEVA MECÁNICA

CAPÍTULO I

LA MECÁNICA Y EL RADIO

I. INTRODUCCIÓN

Desde los días de Newton, los principios generales de la dinámica han servido como el fundamento de la ciencia física, y además parecían ser inmutables. ¿Están a punto de ser abandonados tales principios, o por lo menos, de ser profundamente modificados? Esta es una pregunta que mucha gente se ha hecho en los últimos años. De acuerdo con ellos, el descubrimiento del radio ha alterado lo que se consideraba como las doctrinas científicas más firmes, a saber, la imposibilidad de la transmutación de los metales, por una parte, y los postulados fundamentales de la mecánica, por la otra. Quizá se han precipitado demasiado para considerar a estas novedades como definitivamente establecidas, y como para hacer añicos a nuestros ídolos de ayer, y quizá sería más conveniente esperar por experimentos más numerosos y convincentes. No obstante, es necesario que adquiramos, de una vez y por todas, un conocimiento de las nuevas doctrinas y de los argumentos, ya más significantes, sobre los cuales se basan estas personas.

Primero recordaremos, en unas pocas palabras, cuáles son estos principios.

A. El movimiento de un punto material, aislado y no afectado por fuerza exterior alguna, es rectilíneo y uniforme. Este es el principio de la inercia: no hay aceleración sin fuerza.

B. La aceleración de un punto en movimiento tiene la misma dirección que la resultante de todas las fuerzas a las cuales está sujeto el punto, y es igual al cociente de este resultante por un coeficiente llamado la *masa* del punto en movimiento.

C. Todas las fuerzas a las que está sujeto el punto material surgen por la acción de otros puntos materiales, y dependen únicamente de las posiciones *relativas* y de las velocidades de estos distintos puntos materiales.

Al combinar los principios *B* y *C* llegamos al *principio del movimiento relativo*, por virtud del cual las leyes del movimiento de un sistema son las mismas ya sea que refiramos el sistema a ejes fijos, o que lo refiramos a ejes en movimiento animados por un movimiento rectilíneo y uniforme hacia delante, de tal suerte que es imposible distinguir el movimiento absoluto del relativo referido a tales ejes en movimiento.

D. Si un punto material *A* actúa sobre otro punto material *B*, el cuerpo *B* reacciona sobre *A*, y estas dos acciones son dos fuerzas iguales y directamente opuestas una a la otra. Este es *el principio de igualdad de acción y reacción*, o, más brevemente, *el principio de reacción*.

Las observaciones astronómicas y los fenómenos físicos más comunes parecen haber proporcionado la confirmación más completa, invariable y precisa de estos principios. Esto, se nos dice, es cierto, pero sólo porque hemos tratado con velocidades bajas. Mercurio, por ejemplo, que se mueve más rápido que cualquier otro planeta, apenas viaja a sesenta millas por segundo. ¿Se comportaría de la misma forma si viajase mil veces más rápido? Es claro que aún no debemos inquietarnos; cualquiera que sea el progreso del automovilismo, pasará algún tiempo antes de que dejemos de aplicar los principios clásicos de la dinámica a nuestras máquinas. ¿Cómo es entonces que hemos podido darnos cuenta de velocidades mil veces mayores que la de Mercurio, iguales, por ejemplo, a una décima o a una tercera parte de la velocidad de la luz, o llegando incluso más cerca a ésta que eso? Lo anterior ha sido posible gracias a la ayuda de los rayos catódicos y de los rayos de radio.

Sabemos que el radio emite tres tipos de rayos, designados por las tres letras griegas α, β, γ. En lo que sigue, a menos que específicamente señale lo contrario, siempre hablaré de los rayos β, que son análogos a los rayos catódicos.

Después del descubrimiento de los rayos catódicos, fueron propuestas dos teorías opuestas. Crookes atribuyó el fenómeno a un bombardeo molecular real, mientras que Hertz a ondulaciones peculiares del éter. Esta disputa fue una repetición de la controversia que había dividido a los físicos un siglo antes con respecto a la luz. Crookes regresó a la teoría de la emisión, abandonada en el caso de la luz, mientras que Hertz sostuvo la teoría ondulatoria. Sea como fuere, los hechos parecían favorecer a Crookes.

Se reconoció, en primer lugar, que los rayos catódicos llevan consigo una carga eléctrica negativa: son desviados por un campo magnético y por un campo eléctrico, y estas desviaciones son precisamente lo que producirían estos mismos campos sobre proyectiles animados a grandes velocidades y altamente cargados con electricidad negativa. Estas dos desviaciones dependen de dos cantidades: la velocidad, por una parte, y la proporción de la carga eléctrica del proyectil a su masa, por la otra. No podemos conocer el valor absoluto de esta masa, ni el de la carga, sino únicamente su proporción. De hecho, es claro que si duplicamos tanto la carga como la masa, sin cambiar la velocidad, duplicaremos la fuerza que tiende a desviar el proyectil, pero como su masa es similarmente duplicada, la aceleración observable y la desviación no cambiarán. Por consiguiente, la observación de las dos desviaciones nos proporcionará dos ecuaciones para determinar estas dos cantidades desconocidas. Encontramos una velocidad de 6,000 a 20,000 millas por segundo. En cuanto a la proporción de la carga a la masa, es sumamente grande, y podía compararse a la proporción correspondiente en el caso de un ión de hidrógeno en electrólisis, y encontramos entonces que un proyectil catódico lleva consigo mil veces más de electricidad que una masa igual de hidrógeno en un electrólito.

Para confirmar esto, requerimos una medida directa de esta velocidad, que pueda después ser comparada con la velocidad así calculada. Algunos experimentos ya viejos llevados a cabo por el señor J. J. Thomson han dado resultados más de cien veces bajos, pero estaban sujetos a ciertas causas de error. La cuestión ha sido retomada por Wiechert, quien con la ayuda de un arreglo por el que hace uso de oscilaciones hertzianas, ha ofrecido resultados en concordancia con la teoría, por lo menos en lo que se refiere a la magnitud, y sería muy interesante volver a realizar estos experimentos. Sea como fuere, la teoría de las ondulaciones parece ser incapaz de explicar este cuerpo de hechos.

Los mismos cálculos hechos sobre los rayos β del radio han producido velocidades incluso más altas (de 60,000, 120,000 millas por segundo, e incluso más). Estas velocidades superan por mucho a cualquier velocidad que conozcamos. Es cierto que la luz, como hemos sabido por mucho tiempo, viaja a 186,000 millas por segundo, pero no es una transportación de materia, mientras que, si adoptamos la teoría de la emisión para los rayos catódicos, tenemos moléculas materiales realmente animadas a las velocidades en cuestión, y entonces tendríamos que investigar si las leyes ordinarias de la mecánica siguen siendo aplicables a ellas.

II. MASA LONGITUDINAL Y TRANSVERSAL

Sabemos que las corrientes eléctricas dan lugar a fenómenos de inducción, en particular de *autoinducción*. Cuando una corriente se incrementa, desarrolla una fuerza electromotriz de autoinducción que tiende a oponerse a la corriente. Por el contrario, cuando la corriente disminuye, la fuerza electromotriz tiende a mantener la corriente. La autoinducción se opone, pues, a toda variación en la intensidad de una corriente, justo como en la mecánica la inercia de un cuerpo se opone a toda variación en su velocidad. *La autoinducción es una inercia real*. Todo tiene lugar como si la corriente no pudiese establecerse sin establecer el circundante éter en movimiento, y como si la inercia de este éter tendiese, consecuentemente, a mantener constante la intensidad de esta corriente. La inercia debe ser superada para establecer la corriente, y debe ser superada de nuevo para hacerla cesar.

Un rayo catódico, que es una lluvia de proyectiles cargados con electricidad negativa, puede compararse a una corriente. Sin duda esta corriente difiere, a primera vista y en cualquier caso, de las corrientes de conducción ordinarias, donde la materia está en reposo y la electricidad circula a través de ella. Es una *corriente de convección*, donde la electricidad está unida a un vehículo material y es transportada por el movimiento de tal vehículo. Pero Rowland ha probado que las corrientes de convección producen los mismos efectos magnéticos de la inducción. Primero, si no fuese así, se violaría el principio de la conservación de la energía, y, segundo, Crémien y Pender han empleado un método en donde estos efectos de inducción son demostrados *directamente*.

Si la velocidad de un corpúsculo catódico varía, la intensidad de la corriente correspondiente igualmente variará, y se desarrollarán efectos de autoinducción que tenderán a oponerse a esta variación. Estos corpúsculos deben, por tanto, poseer una doble inercia: primero, su inercia real, y después una inercia aparente debida a la autoinducción, que produce los mismos efectos. Tendrán, entonces, una masa total aparente, compuesta por su masa real y por una masa ficticia de origen electromagnético. Los cálculos muestran que esta masa ficticia varía con la velocidad (cuando esto es comparable a la velocidad de la luz), y que la fuerza de la inercia de autoinducción no es la misma cuando incrementa o disminuye la velocidad del proyectil, ni cuando cambia su dirección, y, de acuerdo con esto, lo mismo se mantiene para la fuerza total aparente de la inercia.

La masa total aparente no es, por lo tanto, la misma cuando la fuerza real aplicada al corpúsculo es paralela a su velocidad y tiende a acelerar su movimiento, que cuando es perpendicular a la velocidad y tiende a alterar su dirección. Entonces, debemos distinguir entre la *masa total longitudinal* y la *masa total transversal*, y, además, estas dos masas totales dependen de la velocidad. Tales son los resultados del trabajo teórico de Abraham.

En las mediciones que consideramos en la última sección, ¿qué era lo que estaba determinado al medir las dos desviaciones? La velocidad, por un lado, y la proporción de la carga a la *masa total transversal*, por el otro. Bajo estas condiciones, ¿cómo es que debemos determinar cuáles son las proporciones, en esta masa total, de la masa real y de la masa ficticia electromagnética? Si contásemos sólo con los rayos catódicos propiamente dichos, ni siquiera podríamos soñar con hacer lo anterior, pero, afortunadamente, contamos con los rayos del radio, cuya velocidad, como hemos visto, es considerablemente más alta. Estos rayos no son todos idénticos, y no se comportan de la misma forma bajo la acción de un campo eléctrico y de uno magnético. Encontramos que la desviación eléctrica es una función de la desviación magnética, y al recibir sobre una placa sensible rayos de radio que han estado sujetos a la acción de los dos campos, podemos fotografiar la curva que representa la relación entre estas dos desviaciones. Esto es lo que ha hecho Kaufmann, y ha deducido la relación entre la velocidad y la proporción de la carga a la masa total aparente, una proporción que llamamos ϵ.

Podríamos suponer que existen varios tipos de rayos, cada uno caracterizado por una velocidad particular, por una carga particular, y por una masa particular; pero esta hipótesis es sumamente improbable. ¿Qué razón podría haber, en realidad, para que todos los corpúsculos de la misma masa tengan siempre la misma velocidad? Resulta más natural suponer que la carga y la masa *real* son las mismas para todos los proyectiles, y que solamente difieren en la velocidad. Si la proporción ϵ es una función de la velocidad, no es porque la masa real varíe con la velocidad, sino porque, como la masa ficticia electromagnética depende de la velocidad, la masa total aparente, que es la única observable, debe también depender de ella, incluso cuando la masa real no depende de ella sino que es constante.

Los cálculos de Abraham nos hacen conocer la ley en concordancia con la cual la masa *ficticia* varía como una función de la velocidad, y los experimentos de Kaufmann nos hacen conocer la ley de variación de la masa *total*. Una comparación de

estas dos leyes nos permitirá, por tanto, determinar la proporción de la masa *real* a la masa total.

Tal es el método empleado por Kaufmann para determinar esta proporción, y el resultado es más que sorprendente: *la masa real es nula*.

Así es como hemos llegado a concepciones realmente inesperadas. Lo que ha sido probado únicamente para el caso de los corpúsculos catódicos ha sido extendido a todos los cuerpos. Lo que llamamos masa parecería no ser sino una apariencia, y toda inercia ser de origen electromagnético. Pero si esto es cierto, la masa ya no es constante, sino que incrementa con la velocidad: mientras que, aparentemente constante para velocidades de hasta 600 millas por segundo, crece a partir de entonces y se vuelve infinita a la velocidad de la luz. La masa transversal ya no es igual a la masa longitudinal, sino sólo aproximadamente igual si la velocidad no es muy grande. El principio *B* de la mecánica ya no es cierto.

III. RAYOS CANALES

Al punto que hemos llegado, esta conclusión podría parecer prematura. ¿Podemos aplicar a la totalidad de la materia lo que únicamente se ha establecido para estos corpúsculos de luz, que son sólo una emanación de materia y quizá no materia real? Antes de abordar esta cuestión, debemos decir unas cuantas palabras sobre otro tipo de rayos, a saber, los rayos canales, los *Kanalstrahlen* de Goldstein. De manera simultánea a los rayos catódicos cargados con electricidad negativa, el cátodo emite rayos canales cargados con electricidad positiva. En general, estos rayos canales, no siendo repelidos por el cátodo, permanecen confinados en la vecindad inmediata de tal cátodo, donde forman un “estrato amarillento” no muy fácil de detectar. Pero si el cátodo es perforado con agujeros y bloquea al tubo casi por completo, los rayos canales se generarán *detrás* del cátodo, en la dirección opuesta a la de los rayos catódicos, y entonces será posible estudiarlos. Es así como hemos podido demostrar su carga positiva y mostrar que las desviaciones magnéticas y eléctricas aún existen, como en el caso de los rayos catódicos, aunque sean mucho más débiles.

El radio, de igual forma, emite rayos similares a los rayos canales, y relativamente muy absorbibles, llamados rayos α.

Como en el caso de los rayos catódicos, podemos medir las dos desviaciones y deducir la velocidad y la proporción ϵ. Los resultados son menos constantes que en el

caso de los rayos catódicos, pero la velocidad es menor, como también lo es la proporción ϵ. Los corpúsculos positivos están menos altamente cargados que los negativos, o si, como resulta más natural, suponemos que las cargas son iguales y de signo opuesto, los corpúsculos positivos son mucho más grandes. A estos corpúsculos, cargados algunos positiva y otros negativamente, se les ha dado el nombre de electrones.[25]

IV. LA TEORÍA DE LORENTZ

Pero los electrones no solamente dan evidencia de su existencia en estos rayos en donde aparecen animados a enormes velocidades. Los veremos en lugares muy distintos, y son ellos los que nos explican los principales fenómenos de la óptica y de la electricidad. La brillante síntesis sobre la que voy a hablar ahora se debe a Lorentz.

La materia está completamente formada por electrones con enormes cargas, y si nos parece neutral es porque las cargas de los electrones de signo opuesto equilibran tal relación. Por ejemplo, podemos imaginar una especie de sistema solar consistente en un gran electrón positivo, sobre el cual gravitan numerosos planetas pequeños que vendrían a ser los electrones negativos, atraídos por la electricidad de signo opuesto con la que está cargado el electrón central. Las cargas negativas de estos planetas equilibran la carga positiva del Sol, de tal suerte que la suma algebraica de todas estas cargas es cero.

Todos estos electrones están sumergidos en éter. El éter es en todos lados idéntico a sí mismo, y las perturbaciones se producen en él, siguiendo las mismas leyes que la luz o que las oscilaciones hertzianas en espacio vacío. Más allá de los electrones y del éter no hay nada. Cuando una onda luminosa penetra una parte del éter donde los electrones son numerosos, éstos son puestos en movimiento bajo la influencia de la perturbación del éter, y después reaccionan sobre éste. Esto vale para la refracción, la dispersión, la doble refracción, y la absorción. De la misma forma, si un electrón fue puesto en movimiento por cualquier razón, perturbará el éter a su alrededor y dará nacimiento a ondas luminosas, lo que explica la emisión de luz por cuerpos incandescentes.

[25] El nombre ahora es aplicado únicamente a los corpúsculos negativos, que parecen no poseer una masa real y sólo una masa electromagnética ficticia, y no a los rayos canales, que parecen consistir en átomos químicos ordinarios cargados positivamente, debido al hecho de que han perdido uno o más de los electrones que poseen en su estado neutral ordinario.

En ciertos cuerpos - en los metales, por ejemplo - tenemos electrones inmóviles, sobre los cuales circulan electrones móviles que gozan de una completa libertad, excepto para abandonar el cuerpo metálico y cruzar la superficie que lo separa del espacio exterior, o del aire, o de cualquier otro cuerpo no metálico. Estos electrones móviles se comportan, dentro del cuerpo metálico, como lo hacen las moléculas de un gas, de acuerdo con la teoría cinética de los gases, dentro del recipiente en donde el gas está contenido. Pero bajo la influencia de una diferencia de potencial, los electrones móviles negativos tenderán, todos, a ir hacia un lado, y los electrones móviles positivos hacia el otro. Esto es lo que produce las corrientes eléctricas, *y es por esta razón por la que tales cuerpos actúan como conductores*. Por otra parte, las velocidades de nuestros electrones serán mayores a medida que sube la temperatura, si es que aceptamos la analogía con la teoría cinética de los gases. Cuando uno de estos electrones móviles encuentra la superficie del cuerpo metálico, una superficie que no puede cruzar, se desvía como lo haría una bola de billar que ha tocado el cojín de la mesa, y su velocidad sufre un súbito cambio de dirección. Pero cuando un electrón cambia su dirección, como veremos más adelante, se vuelve la fuente de una onda luminosa, y a esto se debe que los metales calientes sean incandescentes.

En otros cuerpos, tales como los dieléctricos o los transparentes, los electrones móviles gozan de mucha menos libertad, y permanecen, como estaban, unidos a electrones fijos que los atraen. Cuanto más se alejan, mayor es la atracción que tiende a traerlos de vuelta. Por consiguiente, solamente pueden experimentar ligeros desplazamientos; no pueden circular a lo largo del cuerpo, sino únicamente oscilar sobre su posición media. Es por lo anterior que estos cuerpos no son conductores; son, además, generalmente transparentes, y son refractivos porque las vibraciones luminosas son comunicadas a los electrones móviles susceptibles de oscilación, y resulta una refracción del haz de luz original.

No puedo dar los detalles de estos cálculos, pero me contentaré con decir que esta teoría vale para todos los hechos conocidos, y nos ha permitido prever unos cuantos nuevos, tal como el fenómeno de Zeeman.

V. CONSECUENCIAS MECÁNICAS

Ahora podemos formar dos hipótesis como explicación de los hechos arriba mencionados.

1. Los electrones positivos poseen una masa real, mucho mayor que su ficticia masa electromagnética, y los electrones negativos, solos, están desprovistos de una masa real. Incluso podemos suponer que, además de los electrones de ambos signos, existen átomos neutrales que no tienen otra masa que su masa real. En este caso, la mecánica no se ve afectada, y no tenemos necesidad de tocar sus leyes: la masa real es constante, y solamente los movimientos se ven perturbados por los efectos de la autoinducción, como siempre se ha sabido. Estas perturbaciones son, además, casi despreciables, excepto en el caso de los electrones negativos que, al no tener masa real, no son materia real.

2. Pero existe otro punto de vista. Podemos suponer que los átomos neutrales no existen, y que los electrones positivos están tan desprovistos de masa real como los electrones negativos. Pero si esto es así, la masa real desaparece, y, o bien la palabra *masa* ya no tendrá significado, o bien deberá designar a la ficticia masa electromagnética. En este último caso, la masa ya no será constante, la masa transversal ya no será igual a la masa longitudinal, y los principios de la mecánica se verán alterados.

Por último, unas cuantas palabras como explicación. Antes dije que, para la misma carga, la masa *total* de un electrón positivo es mucho mayor que la de un electrón negativo. Entonces es natural suponer que esta diferencia se explica por el hecho de que el electrón positivo tiene, además de su masa ficticia, una masa real considerable, lo que nos llevaría de nuevo a la primera hipótesis. Pero igualmente podríamos admitir que la masa real es nula tanto para uno como para otro electrón, pero que la masa ficticia del electrón positivo es mucho mayor, porque este electrón es mucho menor. Dije, deliberadamente, *mucho menor*. Y en realidad, en esta hipótesis, la inercia tiene un origen exclusivamente electromagnético, y está reducida a la inercia del éter; los electrones ya no son nada por sí mismos, sino únicamente agujeros en el éter, y sobre los cuales el éter se ve agitado. Mientras más pequeños sean estos agujeros, más éter habrá, y mayor será, consecuentemente, su inercia.

¿Cómo debemos decidir entre estas dos hipótesis? ¿Trabajando sobre los rayos canales, tal como Kaufmann lo ha hecho sobre los rayos β? Esto es imposible, ya que la velocidad de estos rayos es demasiado baja. De tal suerte que cada uno debe decidir de acuerdo con su temperamento: los conservadores se posicionarán de un lado y los amantes de la novedad del otro. Pero quizá, para obtener un entendimiento completo de los argumentos de los innovadores, debemos recurrir a otras consideraciones.

CAPÍTULO II

MECÁNICA Y ÓPTICA

Conocemos la naturaleza del fenómeno de aberración descubierto por Bradley. A la luz que emana de una estrella le toma cierto tiempo atravesar el telescopio. Durante este tiempo, el telescopio se desplaza por el movimiento de la Tierra. Si, por lo tanto, el telescopio fuese apuntado en la *verdadera* dirección de la estrella, la imagen se formaría en el punto ocupado por los hilos cruzados del retículo cuando la luz alcanzase al objeto de cristal. Cuando la luz llegase al plano del retículo, tales hilos cruzados ya no estarían en el mismo punto, debido al movimiento terrestre. Por consiguiente, nos vemos obligados a alterar la dirección del telescopio para llevar la imagen de vuelta a los hilos cruzados. De esto se sigue que el astrónomo no apuntará su telescopio exactamente en la dirección de la velocidad absoluta de la luz de la estrella - esto es, a la verdadera posición de la estrella - sino en la dirección de la velocidad relativa de la luz en relación con la Tierra - esto es, a lo que se conoce como la posición aparente de la estrella -.

Se conoce cuál es la velocidad de la luz, y en concordancia podemos imaginar que tenemos los medios para calcular la velocidad *absoluta* de la Tierra (más adelante explicaré el significado de la palabra *absoluta*). Pero eso no es todo. Ciertamente conocemos la posición aparente de la estrella que observamos, pero no conocemos su verdadera posición. Conocemos la velocidad de la luz únicamente en términos de magnitud y no de dirección.

Si, por tanto, la velocidad de la Tierra fuese rectilínea y uniforme, nunca habríamos siquiera sospechado del fenómeno de aberración. Pero la velocidad es variable, y está compuesta de dos partes: la velocidad del Sistema Solar, que es, hasta donde sabemos, rectilínea y uniforme, y la velocidad de la Tierra con respecto al Sol, que es variable. Si la velocidad del Sistema Solar - es decir, la parte constante - existiese por sí sola, la dirección observada sería invariable, y la posición así observada sería la posición aparente *media* de la estrella.

Ahora bien, si tomamos en cuenta ambas partes de la velocidad de la Tierra a la vez, obtendremos la posición aparente real, que describe una pequeña elipse sobre la posición aparente media, y es esta elipse la que es observada.

Despreciando cantidades muy pequeñas, veremos que la dimensiones de esta elipse dependen solamente de la relación entre la velocidad de la Tierra con respecto al Sol y a la velocidad de la luz, de tal suerte que la única velocidad en cuestión es la velocidad *relativa* de la Tierra con respecto al Sol.

Pero debemos hacer una pausa. Este resultado no es exacto, sino aproximado. Empujemos, pues, la aproximación un paso más. Las dimensiones de la elipse dependerán entonces de la velocidad absoluta de la Tierra. Si comparamos los grandes ejes de la elipse para las distintas estrellas, tendremos - por lo menos en teoría - los medios para determinar esta velocidad absoluta.

Esto quizá es menos asombroso de lo que a primera vista parece. En realidad, no es una cuestión de la velocidad en relación con el espacio absoluto, sino de la velocidad en relación con el éter, considerado, *por definición*, como estando en reposo absoluto.

Por otra parte, este método es puramente teórico. En realidad, la aberración es muy pequeña, y las posibles variaciones de la elipse de la aberración son todavía más pequeñas. En consecuencia, si consideramos a la aberración como de primer orden, las variaciones deberán considerarse como de segundo orden, alrededor de una milésima de segundo de arco, y totalmente inapreciables por nuestros instrumentos. Por último, más adelante veremos por qué debe rechazarse la teoría anterior, y por qué no podríamos determinar esta velocidad absoluta incluso si nuestros instrumentos fuesen diez mil veces más precisos.

Puede concebirse otro método, y, en realidad, ya ha sido concebido. La velocidad de la luz no es la misma en el agua que en el aire. ¿No podríamos comparar las dos posiciones aparentes de una estrella vista a través de un telescopio llenado primero con aire y después con agua? Los resultaos han sido negativos; las aparentes leyes de reflexión y de refracción no se ven alteradas por el movimiento terrestre. Este fenómeno admite dos explicaciones.

1. Podemos suponer que el éter no está en reposo, sino que se ve desplazado por cuerpos en movimiento. Entonces no sería sorprendente que el fenómeno de refracción no se vea alterado por el movimiento de la Tierra, ya que todo - lentes, telescopios, y éter - sería arrastrado por el mismo movimiento. En cuanto a la propia aberración, se explicaría por una especie de refracción producida en la superficie de la separación del éter en reposo en los espacios interestelares y el éter transportado por el movimiento terrestre. Es sobre esta hipótesis (la translación total del éter) que está fundada la *teoría de Hertz* sobre la electrodinámica de los cuerpos en movimiento.

2. Fresnel, por el contrario, supone que el éter se encuentra en un reposo absoluto en el espacio, y en un reposo casi absoluto en el aire, sin importar cuál sea la velocidad de tal aire, y que [el éter] se ve parcialmente desplazado por medios refringentes. Lorentz ha dado a esta teoría una forma más satisfactoria. Para él, el éter está en reposo y los electrones, por sí solos, están en movimiento. En el espacio, donde entra en juego el éter por sí solo, el desplazamiento es nulo o casi nulo. En medios refringentes, donde la perturbación es producida tanto por las vibraciones del éter como por aquellos electrones puestos en movimiento por la agitación del éter, las ondulaciones son *parcialmente* arrastradas.

Para ayudarnos a decidir entre estas dos hipótesis, podemos recurrir al experimento de Fizeau, quien comparó, a partir de medir las franjas de la interferencia, la velocidad de la luz en el aire en reposo y en movimiento, así como en el agua en reposo y en movimiento. Estos experimentos han confirmado la hipótesis de Fresnel sobre el desplazamiento parcial, y han sido repetidos, con el mismo resultado, por Michelson. *La teoría de Hertz, por lo tanto, debe ser rechazada*.

II. EL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Pero si el éter no se ve desplazado por el movimiento terrestre, ¿es posible demostrar, a partir de fenómenos ópticos, la velocidad absoluta de la Tierra, o mejor dicho, su velocidad en relación con el éter en reposo? La experiencia ha ofrecido una respuesta negativa, aun cuando los procesos experimentales han variado en toda forma posible. Sin importar cuál sea el método empleado, nunca podremos revelar excepto velocidades relativas; me refiero, pues, a las velocidades de ciertos cuerpos materiales con respecto a otros cuerpos materiales. En realidad, cuando la fuente de la luz y el aparato para la observación se encuentran ambos sobre la Tierra y participan en su movimiento, los resultados experimentales siempre han sido los mismos, sea cual sea la dirección del aparato con respecto a la dirección del movimiento orbital terrestre. Tal aberración astronómica que tiene lugar se debe al hecho de que la fuente, que es una estrella, está en movimiento con respecto al observador.

Las hipótesis formadas hasta ahora dan cuenta perfectamente de este resultado general, *siempre que omitamos cantidades muy pequeñas sobre el orden del cuadrado de la aberración*. La explicación se basa en la noción de *tiempo local* introducida por Lorentz, y que ahora intentaré aclarar. Imaginemos dos observadores puestos uno en un

punto *A* y el otro en un punto *B*, deseando ajustar sus relojes a partir de señales ópticas. Concuerdan en que *B* mande una señal a *A*, en una hora dada, con su reloj, y *A* ajustará su reloj a esa hora tan pronto como vea la señal. Si la operación fuese realizada únicamente de esta forma, habría un error sistemático, porque como a la luz le toma cierto tiempo *t* viajar de *B* a *A*, el reloj de *A* siempre estará atrasado con respecto al reloj de *B* en la medida de *t*. Este error es fácilmente corregible, ya que resulta suficiente con que se intercambien las señales. *A*, a su vez, debe enviar señales a *B*, y después de este nuevo ajuste será el reloj de *B* el atrasado con respecto al reloj de *A* en la medida de *t*. Después solamente será necesario considerar la media aritmética entre ambos ajustes.

Pero este método de operar asume que a la luz le toma el mismo tiempo viajar de *A* a *B* y regresar de *B* a *A*. Esto es cierto si los observadores están en reposo, pero ya no lo es si están involucrados en una transposición común, porque en tal caso *A*, por ejemplo, se encontrará con la luz que proveniente de *B*, mientras que *B* se retirará de la luz proveniente de *A*. De acuerdo con esto, si los observadores están involucrados en una transposición común sin sospechar de ello, su ajuste será deficiente; sus relojes no marcarán el mismo tiempo, sino que cada uno de ellos marcará el *tiempo local* propio al lugar donde se encuentre.

Los dos observadores no tendrán medio alguno para detectar esto si el éter en reposo únicamente puede transmitir señales luminosas viajando todas a la misma velocidad, y si las otras señales que pueden mandar les son transmitidas por medios involucrados, junto con ellos, en su transposición. El fenómeno que cada uno de ellos observa no será ni temprano ni tardío: no ocurriría en el momento en que ocurre si no hubiese transposición, pero como sus observaciones son hechas con un reloj defectuosamente ajustado, no lo detectarán, y las apariencias no se verán alteradas.

De esto se sigue que la compensación es fácil de explicar siempre que omitamos el cuadrado de aberración, y por mucho tiempo los experimentos no fueron lo suficientemente precisos como para tener que tomar esto en cuenta. Pero un día Michelson pensó en un proceso mucho más delicado. Introdujo rayos que habían atravesado distintas distancias después de haber sido reflejados por espejos. Cada una de las distancias es de aproximadamente una yarda, y las franjas de interferencia hacen posible detectar diferencias de una fracción de una millonésima de un milímetro - $\left(\frac{1}{25000000}\right)$ de una pulgada -. El cuadrado de aberración ya no puede ser desatendido,

y aún así, *los resultados fueron negativos*. Por consiguiente, la teoría requería ser completada, y esto ha sido hecho por *la hipótesis de Lorentz y Fitz-Gerald*.

Estos dos físicos asumen que todos los cuerpos involucrados en una transposición experimentan una contracción en la dirección de esta transposición, mientras que sus dimensiones perpendiculares a la transposición permanecen invariables. *Esta contracción es la misma para todos los cuerpos*. Es, además, muy leve, alrededor de una parte en doscientos millones para una velocidad como la de la Tierra. Más aún, nuestros instrumentos de medición no pueden revelarla, incluso si fuesen mucho más precisos, porque las medidas con las que medimos experimentan la misma contracción que los objetos a ser medidos. Si un cuerpo se ajusta exactamente a una medida cuando tal cuerpo, y consecuentemente la medida, giran en el sentido del movimiento terrestre, no dejará de ajustarse a la medida, de manera exacta, cuando giren en otra dirección, a pesar del hecho de que tanto el cuerpo como la medida han cambiado su longitud al cambiar su dirección, precisamente porque el cambio es el mismo para ambos. Pero no es así si medimos una distancia, ya no a partir de una medida, sino a partir del tiempo que toma la luz en atravesarla, y esto es exactamente lo que ha hecho Michelson.

Así, pues, un cuerpo esférico en reposo asumirá la forma de un elipsoide aplanado de revolución cuando se encuentre en movimiento. Pero el observador siempre creerá que es esférico, porque él mismo ha experimentado una deformación análoga, así como también todos los objetos que le sirven como puntos de referencia. Por el contrario, las superficies de las ondas de luz, que han permanecido exactamente esféricas, le parecerán como elipsoides alargados.

¿Qué sucederá entonces? Imaginemos un observador y una fuente involucrados, ambos, en la transposición. Las superficies de onda que emanan de la fuente serán esferas, teniendo como centro las sucesivas posiciones de la fuente. La distancia de este centro desde la posición real de la fuente será proporcional al tiempo transcurrido desde la emisión (es decir, al radio de la esfera). Todas estas esferas son, en concordancia, homotéticas una con la otra, en relación con la posición real *S* de la fuente. Pero para nuestro observador, debido a la contracción, todas estas esferas parecerán ser elipsoides alargados, y todos estos elipsoides seguirán siendo homotéticos en relación con el punto *S*; la excentricidad de todos los elipsoides es la misma, y depende únicamente de la velocidad de la Tierra. *Debemos seleccionar nuestra ley de contracción de tal forma que S sea el foco de la sección meridiana del elipsoide*.

Esta vez la compensación es *exacta*, y se explica por los experimentos de Michelson.

Antes dije que, de acuerdo con las teorías ordinarias, las observaciones de la aberración astronómica podrían hacernos conocer la velocidad absoluta de la Tierra si nuestros instrumentos fuesen mil veces más precisos; pero esta conclusión debe modificarse. Es cierto que los ángulos observados se verían modificados por el efecto de esta velocidad absoluta, pero los círculos graduados que utilizamos para medir los ángulos se deformarían por el movimiento, a saber, se volverían elipses, y el resultado sería un error en el ángulo medido, *y este segundo error compensaría, de manera exacta, al primero*.

Esta hipótesis de Lorentz y Fitz-Gerald parecerá más extraordinaria a primera vista. Todo lo que puede decirse a su favor, por el momento, es que es simplemente la interpretación inmediata del resultado experimental de Michelson, si definimos a las *distancias* por el tiempo que toma a la luz atravesarlas.

Sea como fuere, es imposible eludir la impresión de que el *principio de relatividad* es una ley general de la naturaleza, y que nunca podremos demostrar, por cualquier método imaginable, nada excepto velocidades relativas. Y por esto no sólo me refiero a las velocidades de los cuerpos con respecto al éter, sino a las velocidades de los cuerpos con respecto a otros cuerpos. Han sido tantos los experimentos que han producido resultados similares que podemos sentirnos tentados a atribuir a este principio de relatividad un valor comparable, por ejemplo, al del principio de equivalencia. Sería bueno, en cualquier caso, ver cuáles son las consecuencias a las que nos llevaría este punto de vista, y después someterlas a la prueba experimental.

III. EL PRINCIPIO DE REACCIÓN

Veamos qué es lo que pasa, bajo la teoría de Lorentz, con el principio de la igualdad entre acción y reacción. Consideremos un electrón *A*, puesto en movimiento por algunos medios. Este electrón produce una perturbación en el éter, y después de un cierto tiempo esta perturbación alcanza otro electrón *B*, que será expulsado de su posición de equilibrio. Bajo estas condiciones, no puede haber igualdad entre la acción y la reacción, por lo menos si no consideramos al éter sino solamente a los electrones *que son, pos sí solos, observables*, ya que nuestra materia está compuesta de electrones.

En realidad, es el electrón *A* el que ha perturbado al electrón *B*, pero incluso si el electrón *B* reacciona sobre *A*, esta reacción, aunque posiblemente igual a la acción, no puede ser, en cualquier caso, simultánea, ya que el electrón *B* no puede ser puesto en movimiento sino hasta después de un cierto periodo de tiempo necesario para que el efecto viaje por el éter. Si sometemos el problema a un cálculo más preciso, llegamos al siguiente resultado. Imaginemos un excitador de Hertz puesto en el foco de un espejo parabólico al que es atraído mecánicamente. Este excitador emite ondas electromagnéticas, y el espejo conduce a todas estas ondas en la misma dirección; el excitador, entonces, radiará energía en una dirección particular. Pues bien, los cálculos muestran que *el excitador retrocederá* como un cañón que ha disparado un proyectil. En el caso del cañón, el retroceso es el resultado natural de la igualdad entre acción y reacción. El cañón retrocede porque el proyectil sobre el que ha actuado reacciona sobre él.

Pero aquí el caso es distinto. Lo que hemos disparado no es un proyectil material, sino energía, y la energía no tiene masa; no hay, pues, un equivalente. En lugar de un excitador, podríamos haber considerado simplemente una lámpara con un reflector concentrando sus rayos en una sola dirección.

Es cierto que si la energía que emana del excitador o de la lámpara alcanza un objeto material éste experimentará un empuje mecánico tal como si hubiese sido golpeado por un proyectil real, y este empuje será igual al retroceso del excitador o de la lámpara si no se hubiese perdido energía en el camino, y si el objeto absorbe la energía por completo. Entonces podríamos caer en la tentación de decir que aún hay una compensación entre la acción y la reacción. Pero esta compensación, aunque sea completa, es siempre tardía. Nunca ocurre, en ningún caso, si la luz, después de haber abandonado la fuente, se pierde en los espacios interestelares sin haber alcanzado un objeto material, y es incompleta si el cuerpo que golpea no es perfectamente absorbente.

¿Son estas acciones mecánicas demasiado pequeñas como para ser medidas, o son apreciables a partir de un experimento? No son otra cosa que las acciones debidas a las presiones de *Maxwell-Bartholi*. Maxwell había predicho la existencia de estas presiones a partir de cálculos relacionados con la electrostática y el magnetismo, y Bartholi llegó a los mismos resultados por razones termodinámicas.

Es así como se explican las *colas de los cometas*. Pequeñas partículas son desprendidas de la cabeza del cometa, y son alcanzadas por la luz del Sol, que las repele justo como haría una lluvia de proyectiles proveniente del Sol. La masa de estas

partículas es tan pequeña que esta repulsión supera a la gravitación newtoniana, y, en consecuencia, forman la cola mientras se alejan del Sol.

No fue fácil obtener una verificación experimental directa de esta presión de radiación. El primer intento llevó a la construcción del *radiómetro*, pero este aparato *gira al revés* de la dirección teórica, y la explicación de su rotación, que ha sido descubierta desde entonces, es completamente distinta. Por fin se ha alcanzado éxito en esta empresa al haber creado, por un lado, un vacío más perfecto, y por el otro, al no haber ennegrecido una de las caras de las placas, y al haber dirigido un haz luminoso sobre una de estas caras. Se han eliminado los efectos radiométricos y otras causas perturbadoras por una serie de minuciosas precauciones, y se ha obtenido una desviación extremadamente pequeña que parece estar en conformidad con la teoría.

De manera similar, los mismos efectos de la presión de Maxwell-Bartholi son predichos por la teoría de Hertz, sobre la que ya hablé antes, y por la de Lorentz, aunque existe una diferencia. Supongamos que la energía, en la forma de luz, por ejemplo, viaja desde una fuente luminosa hasta cualquier cuerpo por un medio transparente. La presión de Maxwell-Bartholi actuará no sólo sobre la fuente al principio y sobre el cuerpo iluminado a su llegada, sino también sobre la materia del medio transparente que atraviesa. En el momento en que la onda luminosa alcanza una nueva porción de este medio, la presión impulsará la materia ahí distribuida, y la hará retroceder de nuevo cuando la onda abandone tal porción. De tal suerte que el retroceso de la fuente tiene como su contraparte al movimiento hacia delante de la materia transparente que está en contacto con la fuente; un poco después, el retroceso de esta misma materia tiene como su contraparte al movimiento hacia delante de la materia transparente un poco más alejada, y así sucesivamente.

Solamente queda por responder si esta compensación es perfecta. ¿Es la acción de la presión de Maxwell-Bartholi sobre la materia del medio transparente igual a su reacción sobre la fuente, y lo anterior sin importar cuál sea la materia? O más bien, ¿es la acción menor en proporción a si el medio es menos refringente y más enrarecido, volviéndose nula en un vacío? Si admitimos la teoría de Hertz, que considera al éter como mecánicamente unido a la materia, de tal forma que el éter es completamente transportado junto con la materia, debemos responder afirmativamente a la primera pregunta y no así a la segunda.

Entonces habría una compensación perfecta, tal como demanda el principio de igualdad entre acción y reacción, incluso en los medios menos refringentes, incluso en

el aire, e incluso en el espacio interplanetario, en donde sería suficiente con imaginar un simple remanente de materia, sin importar qué tan atenuado sea. Pero si, por el contrario, admitimos la teoría de Lorentz, la compensación, siempre imperfecta, es inapreciable en el aire, y se vuelve nula en el espacio.

Pero arriba hemos visto que el experimento de Fizeau no permite conservar la teoría de Hertz. Debemos, por tanto, adoptar la teoría de Lorentz, y consecuentemente *renunciar al principio de reacción*.

IV. CONSECUENCIAS DEL PRINCIPIO DE RELATIVIDAD

Ya hemos visto las razones que nos inclinan a considerar al principio de relatividad como una ley general de la naturaleza. Veamos a qué consecuencias nos llevará este principio si lo consideramos como definitivamente probado.

Antes que nada, nos obliga a generalizar la hipótesis de Lorentz y Fitz-Gerald sobre la contracción de todos los cuerpos en la dirección de su transposición. De manera más particular, debemos extender tal hipótesis a los propios electrones. Abraham consideró a estos electrones como esféricos e indeformables, pero debemos admitir que los electrones, si bien son esféricos cuando están en reposo, experimentan la contracción de Lorentz cuando están en movimiento, y después toman la forma de elipsoides aplanados.

Esta deformación de los electrones tendrá una influencia sobre sus propiedades mecánicas. De hecho, he dicho que el desplazamiento de estos electrones cargados es una corriente de convección real, y que su aparente inercia se debe a la autoinducción de esta corriente, siendo exclusivamente así en el caso de los electrones negativos, y sin saber aún si es exclusivamente así en el caso de los electrones positivos.

En estos términos, la compensación será perfecta y en conformidad con los requerimientos del principio de relatividad, pero sólo bajo dos condiciones:

1. Que los electrones positivos carezcan de una masa real y posean únicamente una ficticia masa electromagnética, o por lo menos que su masa real, si es que existe, no sea constante, sino que varíe con la velocidad, siguiendo las mismas leyes que su masa ficticia.

2. Que todas las fuerzas tengan un origen electromagnético, o por lo menos que varíen con la velocidad, siguiendo las mismas leyes que las fuerzas de origen electromagnético.

De nuevo es Lorentz quien ha hecho esta notable síntesis. Hagamos una pausa para considerar qué resulta de ella. En primer lugar, ya no hay materia, ya que los electrones positivos ya no tienen ningún tipo de masa real, o por lo menos ya no tienen una masa real constante. Los principios actuales de nuestra mecánica, basados sobre la constancia de la masa, deben por tanto ser modificados.

En segundo lugar, debemos buscar una explicación electromagnética para todas las fuerzas conocidas, y especialmente para la gravedad, o por lo menos modificar la ley de gravedad en el sentido de que esta fuerza debe alterarse por la velocidad de la misma forma que las fuerzas electromagnéticas. Más adelante regresaremos a este punto.

A primera vista, todo esto parece un tanto artificial, y de manera más particular, la deformación de los electrones parece extremadamente hipotética. Pero la cuestión puede ser presentada de manera distinta, para evitar tomar a esta hipótesis de la deformación como la base del argumento. Imaginemos a los electrones como puntos materiales, y preguntémonos cómo debería variar su masa como una función de la velocidad de tal forma que no viole el principio de relatividad. O más bien vamos a indagar cuál debe ser su aceleración bajo la influencia de un campo eléctrico o magnético, de tal manera que el principio no se vea violado y que debamos regresar a las leyes ordinarias cuando imaginemos una velocidad muy baja. Encontraremos que las variaciones de esta masa o de estas aceleraciones deben ocurrir *como si* el electrón se sometiese a la deformación de Lorentz.

V. EL EXPERIMENTO DE KAUFMANN

De esta forma, se nos presentan dos teorías: una en donde los electrones son indeformables, que es la teoría de Abraham, y otra en donde experimentan la deformación de Lorentz. En ambos casos, su masa crece con su velocidad, volviéndose infinita cuando tal velocidad iguala a la de la luz, pero la ley de variación no es la misma. Por consiguiente, el método empleado por Kaufmann para demostrar la ley de variación de la masa nos proporcionaría los medios para decidir, experimentalmente, entre ambas teorías.

Desafortunadamente, sus primeros experimentos no fueron lo suficientemente precisos para este propósito, tanto así que pensó necesario repetirlos con más precauciones, y medir la intensidad de los campos con mayor cuidado. En su nueva forma, *han mostrado que la teoría de Abraham es correcta*. De acuerdo con esto, parecería que el principio de relatividad carece del valor exacto que nos hemos visto tentados a darle, y que ya no tenemos razón alguna para suponer que los electrones positivos están desprovistos de una masa real tal como los electrones negativos.

No obstante, antes de adoptar esta conclusión es necesaria una reflexión. La cuestión es de tal importancia que uno desearía ver el experimento de Kaufmann repetido por otro experimentador.[26]

Desafortunadamente, el experimento es sumamente delicado, y no puede realizarse de manera exitosa excepto por un físico tan hábil como Kaufmann. Se han tomado todas las precauciones adecuadas, y uno no ve qué objeción podría hacerse.

Sin embargo, hay un punto sobre el que me gustaría llamar la atención, y es el de la medición del campo electrostático, de la que todo depende. Este campo fue producido entre los dos inducidos de un condensador, y entre estos dos inducidos tuvo que crearse un vacío extremadamente perfecto para obtener un aislamiento completo. Después fue medida la diferencia en el potencial de los dos inducidos, y se obtuvo el campo al dividir esta diferencia entre la distancia entre los inducidos. Esto da a entender que el campo es uniforme, ¿pero es esto cierto? ¿No podría ser que haya una caída repentina en el potencial en la vecindad de uno de los inducidos, del inducido negativo, por ejemplo? Podría haber una diferencia en el potencial en el punto de contacto entre el metal y el vacío, y podría ser que esta diferencia no sea la misma sobre el lado positivo que sobre el negativo. Lo que me lleva a pensar esto es el efecto de la válvula eléctrica entre el mercurio y el vacío. Parecería que debemos tomar en cuenta, por lo menos, la posibilidad de que esto ocurriese, sin importar qué tan pequeña sea la probabilidad.

[26] En el momento de ir a la imprenta, supimos que el señor Bucherer ha repetido el experimento con nuevas precauciones, y que, a diferencia de Kaufmann, ha obtenido resultados que confirman las hipótesis de Lorentz.

VI. EL PRINCIPIO DE INERCIA

En la nueva dinámica, el principio de inercia sigue siendo cierto - es decir, que un electrón *aislado* tendrá un movimiento rectilíneo y uniforme -. Por lo menos esto es generalmente admitido, aunque Lindemann ha hecho objeciones a tal presunción. No deseo tomar partido en esta discusión, que por otra parte no puedo plantear aquí dada su naturaleza extremadamente difícil. En cualquier caso, la teoría solamente requeriría pequeñas modificaciones para eludir las objeciones de Lindemann.

Sabemos que un cuerpo inmerso en un fluido se encuentra con una resistencia considerable cuando está en movimiento, pero esto se debe a que nuestros fluidos son viscosos. En un fluido ideal, absolutamente desprovisto de viscosidad, el cuerpo excitaría por detrás de él una popa de onda líquida, una especie de estela. Al principio, se requeriría de un gran esfuerzo para ponerlo en movimiento, ya que es necesario no solamente perturbar al propio cuerpo, sino también al líquido de su estela. Pero una vez conseguido el movimiento, el cuerpo continuará sin resistencia, ya que éste, a medida que avanza, simplemente lleva consigo la perturbación del líquido, sin incremento alguno en la *vis viva*[27] total del líquido. Todo tendría lugar, por tanto, como si su inercia hubiese incrementado. Un electrón que avanza por el éter se comportará de la misma forma. Alrededor de él, el éter se verá perturbado, pero esta perturbación acompañará al cuerpo en su movimiento, de tal suerte que, para un observador moviéndose junto con el electrón, los campos eléctrico y magnético que acompañan al electrón le parecerán invariables, y solamente podrían cambiar si la velocidad del electrón varía. Por lo tanto, se requiere un esfuerzo para poner al electrón en movimiento, ya que es necesario crear la energía de estos campos. Por otra parte, una vez conseguido el movimiento, ningún esfuerzo es necesario para mantenerlo, ya que la energía creada únicamente tiene que seguir al electrón como una estela. Esta energía, en consecuencia, sólo puede incrementar la inercia del electrón, tal como la agitación del líquido incrementa la del cuerpo inmerso en un fluido perfecto. Y en realidad los electrones, en cualquier caso los electrones negativos, no tienen otra inercia que ésta.

En la hipótesis de Lorentz, la *vis viva*, que no es otra cosa que la energía del éter, no es proporcional a v^2. Sin duda, si v es muy pequeña, la *vis viva* es aparentemente proporcional a v^2, la cantidad de ímpetu aparentemente proporcional a v, y las dos

[27] El término *vis viva* significa *fuerza viva*. Es un término acuñado por Leibniz. Nota del Traductor.

masas aparentemente constantes e iguales entre sí. Pero *cuando la velocidad se acerca a la velocidad de la luz, la vis viva, la cantidad de ímpetu, y las dos masas aumentan más allá de todo límite*.

En la hipótesis de Abraham, las expresiones son un tanto más complicadas, pero lo que ha sido dicho vale en sus características esenciales.

Así, la masa, la cantidad de ímpetu, y la *vis viva* se vuelven infinitas cuando la velocidad es igual a la de la luz. Por tanto, se sigue que *ningún cuerpo puede, por cualquier posibilidad, alcanzar una velocidad mayor que la de la luz*. Y, en efecto, a medida que su velocidad aumenta, su masa aumenta, de tal suerte que su inercia opone un obstáculo cada vez mayor a cualquier nuevo incremento en su velocidad.

Aquí se presenta una cuestión por sí misma. Admitiendo el principio de relatividad, un observador en movimiento carece de medio alguno para percibir su propio movimiento. Si, entonces, ningún cuerpo en su movimiento real puede sobrepasar la velocidad de la luz, pero puede acercarse a ella tanto como desee, debe ser lo mismo con respecto a su movimiento relativo en relación con nuestro observador. Entonces podríamos estar tentados a razonar como sigue: el observador puede alcanzar una velocidad de 120,000 millas por segundo, el cuerpo, en su movimiento relativo con respecto al observador, puede alcanzar la misma velocidad; su velocidad absoluta será, pues, de 240,000 millas, lo que es imposible, ya que es un número mayor que el de la velocidad de la luz. Pero esto es sólo una apariencia que desaparece cuando tomamos en consideración el método de Lorentz para valorar tiempos locales.

VII. LA ONDA DE ACELERACIÓN

Cuando un electrón está en movimiento, produce una perturbación en el éter que lo rodea. Si su movimiento es rectilíneo y uniforme, esta perturbación se reduce a la estela sobre la que ya hablamos. Pero no es así si el movimiento es curvilíneo o no uniforme, porque entonces la perturbación puede ser considerada como la superposición de otras dos, a las que Langevin ha dado los nombres de *onda de velocidad* y *onda de aceleración*.

La onda de velocidad no es otra cosa que la estela producida por el movimiento uniforme. En cuanto a la onda de aceleración, es una perturbación absolutamente similar a las ondas de luz, que parte del electrón en el momento en el que éste experimenta una aceleración y es después transmitida, en sucesivas ondas esféricas, junto con la

velocidad de la luz. De esto se sigue que, en un movimiento rectilíneo y uniforme, existe una completa conservación de la energía, pero tan pronto como haya aceleración, hay pérdida de energía, y ésta es disipada en la forma de ondas de luz o desaparece en un espacio infinito a través del éter.

No obstante lo anterior, los efectos de esta onda de aceleración, y más particularmente la correspondiente pérdida de energía, son despreciables en la mayoría de los casos (esto es, no solamente en la mecánica ordinaria y en los movimientos de los cuerpos celestes, sino también en el caso de los rayos de radio, donde la velocidad, pero no así la aceleración, es muy grande). Es entonces que podemos contentarnos con la aplicación de las leyes de la mecánica, formulando que la fuerza es igual al producto de la aceleración y la masa, y esta masa, sin embargo, variando con la velocidad de acuerdo con las leyes que ya establecimos. Se dice, pues, que el movimiento es *cuasi-estacionario*.

No es así en todos los casos en donde la aceleración es grande, siendo los principales ejemplos de esto los siguientes. (1). En los gases incandescentes, ciertos electrones asumen un movimiento oscilatorio de muy alta frecuencia; los desplazamientos son muy cortos, las velocidades finitas, y las aceleraciones muy grandes. La energía es después comunicada al éter, y es por esta razón por la que estos gases irradian luz de la misma periodicidad que las oscilaciones del electrón. (2). Inversamente, cuando un gas recibe luz, estos mismos electrones son puestos en movimiento con violentas aceleraciones, y absorben la luz. (3). En el excitador de Hertz, los electrones que circulan en la masa metálica experimentan una aceleración repentina en el momento de la descarga, y después asumen un movimiento oscilatorio de alta frecuencia. Se sigue que una parte de la energía se irradia en la forma de ondas hertzianas. (4). En un metal incandescente, los electrones encerrados en tal metal son animados a grandes velocidades. Al llegar a la superficie del metal, que no pueden cruzar, son desviados y experimentan una aceleración considerable, y es por esto que el metal emite luz. Esto ya lo he explicado en el libro III, cap. I, sección 4. Los detalles de las leyes de la emisión de luz por cuerpos oscuros son perfectamente explicados por esta hipótesis. (5). Por último, cuando los rayos catódicos golpean al anticátodo, los electrones negativos que constituyen a estos rayos, animados a grandes velocidades, se detienen repentinamente. Como consecuencia de la aceleración que de esta forma experimentan, producen ondulaciones en el éter. Esto, de acuerdo con ciertos físicos, es

el origen de los rayos de Röntgen, que no son otra cosa que rayos de luz de muy baja longitud ondular.

CAPÍTULO III

LA NUEVA MECÁNICA Y LA ASTRONOMÍA

I. GRAVITACIÓN

La masa puede definirse de dos formas: primero, como el cociente de la fuerza por la aceleración, la verdadera definición de masa, que es la medida de la inercia del cuerpo; segundo, como la atracción ejercida por un cuerpo sobre un cuerpo ajeno, por virtud de la ley newtoniana. Por tanto, debemos distinguir entre la masa, el coeficiente de la inercia, y la masa, el coeficiente de la atracción. De acuerdo con la ley newtoniana, existe una rigurosa proporción entre estos dos coeficientes, pero esto es sólo demostrable para el caso de velocidades a las que apliquen los principios generales de la dinámica. Ahora bien, hemos visto que la masa coeficiente de la inercia se incrementa con la velocidad. ¿Debemos entonces concluir que la masa coeficiente de atracción se incrementa de manera similar con la velocidad y continúa siendo proporcional al coeficiente de la inercia, o más bien que el coeficiente de atracción permanece constante? En realidad, no contamos con los medios suficientes para responder a esta pregunta.

Por otra parte, si el coeficiente de atracción depende de la velocidad, y las velocidades de los cuerpos que mutuamente se atraen no son, por lo general, las mismas, ¿cómo puede este coeficiente depender de estas velocidades?

Hasta este punto, no podemos hacer nada excepto formular hipótesis, y es así como, de manera natural, llegamos a preguntarnos cuál de estas hipótesis será compatible con el principio de relatividad. Existe un gran número de hipótesis, pero la única que mencionaré aquí es la de Lorentz, que expondré de manera breve.

Antes que nada, imaginemos a todos los electrones en reposo. Dos electrones de signo similar se repelen uno a otro, mientras que dos electrones de signo opuesto se atraen uno a otro. De acuerdo con la teoría ordinaria, sus mutuas acciones son proporcionales a sus cargas eléctricas. Por lo tanto, si tenemos cuatro electrones, dos positivos *A* y *A'* y dos negativos *B* y *B'*, y las cargas de estos cuatro electrones son las

mismas en valor absoluto, la repulsión de *A* sobre *A'* será, a la misma distancia, igual a la repulsión de *B* sobre *B'*, y también igual a la atracción de *A* sobre *B'* o de *A'* sobre *B*. Entonces, si *A* y *B* están muy juntos, y también lo están *A'* y *B'*, y examinamos la acción del sistema $A+B$ sobre el sistema $A'+B'$, tendremos dos repulsiones y dos atracciones que se compensan de manera exacta, y la acción resultante será nula.

Ahora bien, las moléculas materiales deben ser consideradas, precisamente, como tipos de sistemas solares por donde circulan los electrones, algunos positivos y otros negativos, *de tal forma que la suma algebraica de todas las cargas sea cero*. De esta manera, una molécula material es, en todos los puntos, comparable al sistema $A+B$ referido antes, y la acción eléctrica total de dos moléculas entre sí debe ser nula.

Pero la experiencia nos muestra que estas moléculas se atraen una con otra en concordancia con la gravitación newtoniana, y, esto siendo así, podemos formar dos hipótesis. Podemos suponer que la gravitación no tiene conexión alguna con la atracción electrostática, que se debe a una causa totalmente distinta, y que simplemente está superpuesta sobre ella; o bien, podemos admitir que no hay proporción alguna entre la atracción y las cargas, y que la atracción ejercida por una carga $+1$ sobre una carga -1 es mayor que la repulsión mutua de dos cargas $+1$ o de dos cargas -1.

En otras palabras, tanto el campo eléctrico producido por los electrones positivos como el producido por los electrones negativos están superpuestos y siguen siendo distintos. Los electrones positivos son más sensibles al campo producido por los electrones negativos que al campo producido por los positivos, y de manera inversa para los electrones negativos. Es claro que esta hipótesis complica un tanto la electrostática, pero incluye a la ley gravitacional. Esta fue, en lo principal, la hipótesis de Franklin.

¿Pero qué sucede si los electrones están en movimiento? Los electrones positivos crearán una perturbación en el éter, y darán lugar, en éste, a un campo eléctrico y a un campo magnético. Los mismo será cierto para los electrones negativos. Entonces los electrones, ya sea positivos o negativos, recibirán un impulso mecánico por la acción de estos distintos campos. En la teoría ordinaria, el campo electromagnético debido al movimiento de los electrones positivos ejerce, sobre dos electrones de signo opuesto y de la misma carga absoluta, acciones iguales y de signo opuesto. Podríamos entonces, sin inconveniencia alguna, ningunear la distinción entre el campo debido al movimiento de los electrones positivos y el campo debido a los negativos, y únicamente considerar la suma algebraica de ambos campos, es decir, al campo resultante.

En la nueva teoría, por el contrario, la acción del campo electromagnético debida a los electrones positivos sobre estos mismos electrones tiene lugar en concordancia con las leyes ordinarias, y lo mismo es cierto para la acción, sobre los electrones negativos, del campo debido a estos últimos. Consideremos ahora la acción del campo debido a los electrones positivos sobre los electrones negativos y *viceversa*. Seguirá siguiendo las mismas leyes, pero *con un coeficiente distinto*. Cada electrón es más sensible al campo creado por los electrones de denominación opuesta que al campo creado por los electrones de la misma denominación.

Tal es la hipótesis de Lorentz, que puede reducirse a la hipótesis de Franklin para velocidades bajas. Concuerda, asimismo, con la ley newtoniana para el caso de estas velocidades bajas. Más aún, como la gravitación se reduce a fuerzas de origen electrodinámico, la teoría general de Lorentz será aplicable a ella, y el principio de relatividad, consecuentemente, no será violado.

Vemos que la ley newtoniana ya no es aplicable a grandes velocidades, y que debe ser modificada para cuerpos en movimiento de la misma forma que las leyes electrostáticas deben serlo para la electricidad en movimiento.

Sabemos que las perturbaciones electromagnéticas se transmiten con la velocidad de la luz. Podríamos estar tentados, por tanto, a rechazar la teoría precedente si recordamos que la gravitación se transmite, de acuerdo con los cálculos de Laplace, por lo menos diez millones de veces más rápido que la luz, y que, consecuentemente, no puede tener un origen electromagnético. El resultado de Laplace es bien conocido, pero su significado, por lo general, se pierde de vista. Laplace asumió que, si la transmisión de la gravitación no es instantánea, su velocidad de transmisión se combina con la del cuerpo atraído, tal como sucede con la luz en el fenómeno de la aberración astronómica, de tal forma que la fuerza efectiva no está dirigida a lo largo de la línea recta que une ambos cuerpos, sino que produce un pequeño ángulo con tal línea recta. Esta es una hipótesis en sumo individual, no muy bien sustentada, y, en cualquier caso, completamente distinta a la de Lorentz. El resultado de Laplace no prueba nada en contra de la teoría de Lorentz.

II. COMPARACIÓN CON LAS OBSERVACIONES ASTRONÓMICAS

¿Son las teorías precedentes reconciliables con las observaciones astronómicas? Para empezar, si las adoptamos, la energía de los movimientos planetarios será

constantemente disipada por el efecto de la *onda de aceleración*. De esto se sigue que habrá una aceleración constante de los movimientos medios de los planetas, como si éstos se moviesen en un medio resistente. Pero este efecto es extremadamente pequeño, tanto que no puede ser revelado ni siquiera por las observaciones más minuciosas. La aceleración de los cuerpos celestes es relativamente pequeña, de tal forma que los efectos de la onda de aceleración resultan despreciables, y puede considerarse al movimiento como *cuasi-estacionario*. Es cierto que los efectos de la onda de aceleración se acumulan de manera constante, pero esta acumulación, por sí misma, es tan lenta que en realidad se requerirían miles de años de observación antes de que fuese perceptible. Hagamos, pues, el cálculo, tomando al movimiento como cuasi-estacionario y bajo las siguientes tres hipótesis:

A. Admitiendo la hipótesis de Abraham (electrones indeformables) y conservando la ley de Newton en su forma ordinaria.

B. Admitiendo la hipótesis de Lorentz sobre la deformación de los electrones y conservando la ley ordinaria de Newton.

C. Admitiendo la hipótesis de Lorentz sobre los electrones y modificando la ley de Newton, como en la sección anterior, para hacerla compatible con el principio de relatividad.

El efecto será más perceptible en el movimiento de Mercurio, porque este planeta tiene la velocidad más alta. Anteriormente, Tisserand hizo un cálculo similar que admitía la ley de Weber. Recordaré al lector que Weber intentó explicar tanto el fenómeno electrostático como el electrodinámico asumiendo que los electrones (cuyo nombre aún no había sido inventado) ejercen, unos sobre otros, atracciones y repulsiones en la dirección de la línea recta que los une, y dependiendo no solamente de sus distancias, sino también de la primera y la segunda derivadas de tales distancias, esto es, consecuentemente, sobre sus velocidades y sus aceleraciones. Esta ley de Weber, tan distinta de aquellas que tienden a ganar aceptación hoy en día, tiene, no obstante, una cierta analogía con ellas.

Tisserand encontró que si la atracción newtoniana tuvo lugar en conformidad con la ley de Weber, entonces resultará, en el perihelio de Mercurio, una variación secular de 14´´ *en la misma dirección en la que se había observado y no explicado*, pero más pequeña, ya que la última es de 38´´.

Regresemos a las hipótesis *A*, *B*, y *C*, y estudiemos primero el movimiento de un planeta atraído por un centro fijo. En este caso, no habrá distinción entre las hipótesis *B*

y *C*, ya que, si el punto de atracción es fijo, el campo que produce es puramente electrostático, en donde la atracción varía en la razón inversa del cuadrado de la distancia, en conformidad con la ley de Coulomb, que es idéntica a la de Newton.

La ecuación para la *vis viva* vale si aceptamos la nueva definición de *vis viva*. De la misma forma, la ecuación de las áreas es remplazada por otra equivalente, y el momento de la cantidad de movimiento será una constante, aunque la cantidad de movimiento debe redefinirse en el nuevo modo.

El único efecto observable será un movimiento secular del perihelio. Para este movimiento obtendremos, con la teoría de Lorentz, un medio, y con la teoría de Abraham dos quintos de lo que fue dado por la ley de Weber.

Si ahora imaginamos dos cuerpos en movimiento gravitando sobre su centro común de gravedad, los efectos son ligeramente distintos, aunque los cálculos son un tanto más complicados. El movimiento del perihelio de Mercurio será entonces de 7´´ en la teoría de Lorentz, y de 5.6´´ en la de Abraham.

El efecto es, además, proporcional a n^3a^2, *n* siendo el movimiento medio del planeta y *a* el radio de su órbita. En consecuencia, para los planetas - por virtud de la ley de Kepler - el efecto varía en la razón inversa de $\sqrt{a^5}$, y resulta, por tanto, imperceptible excepto en el caso de Mercurio.

Es igualmente imperceptible en el caso de la Luna, porque, aunque *n* es grande, *a* es extremadamente pequeña. En resumen, es cinco veces menor para Venus, y seiscientas veces menor para la Luna, que lo que es para Mercurio. Añadiría que, en cuanto a Venus y la Tierra, el movimiento del perihelio (para la misma velocidad angular de este movimiento) será mucho más difícil de detectar a partir de observaciones astronómicas, porque la excentricidad de sus órbitas es mucho más ligera que en el caso de Mercurio.

En resumen, *el único efecto apreciable sobre las observaciones astronómicas será un movimiento del perihelio de Mercurio, en la misma dirección que en la que se había observado sin ser explicado, pero considerablemente menor*.

Esto no puede considerarse como un argumento a favor de la nueva dinámica, ya que aún debemos buscar otra explicación para la mayor parte de las anomalías relacionadas con Mercurio, pero menos puede considerarse como un argumento en contra.

II. LA TEORÍA DE LESAGE

Sería conveniente poner estas consideraciones junto a una teoría presentada hace tiempo para explicar la gravitación universal. Imaginemos los espacios interplanetarios llenos de corpúsculos muy pequeños, viajando en todas direcciones a altas velocidades. Un cuerpo aislado en el espacio, aparentemente, no se verá afectado por las colisiones con estos corpúsculos, ya que éstas están igualmente distribuidas en todas direcciones. Pero si dos cuerpos, *A* y *B*, están próximos, el cuerpo *B* actuará como una pantalla, e interceptará una porción de los corpúsculos que, sin él, hubieran golpeado a *A*. Entonces las colisiones recibidas por *A*, desde el lado alejado de *B*, no tendrán contraparte, o en cualquier caso serán compensadas de manera imperfecta, e impulsarán a *A* hacia *B*.

Tal es la teoría de Lesage, y primero la discutiremos desde el punto de vista de la mecánica ordinaria. Para empezar, ¿cómo deben ocurrir las colisiones requeridas por esta teoría? ¿Deben ocurrir en concordancia con las leyes de los cuerpos perfectamente elásticos, o de cuerpos desprovistos de elasticidad, o en concordancia con alguna ley intermedia? Los corpúsculos de Lesage no pueden comportarse como cuerpos perfectamente elásticos, porque en tal caso el efecto sería nulo, ya que los corpúsculos interceptados por el cuerpo *B* serían remplazados por otros que hubiesen rebotado de *B*, y el cálculo prueba que la compensación sería perfecta.

La colisión debe causar, por tanto, una pérdida de energía a los corpúsculos, y esta energía debe reaparecer en la forma de calor. ¿Pero cuál sería la cantidad de calor así producido? Nos damos cuenta que la atracción pasa a través del cuerpo, y entonces debemos imaginarnos a la Tierra, por ejemplo, no como una pantalla completa, sino como compuesta por un gran número de moléculas esféricas extremadamente pequeñas, actuando de manera individual como pequeñas pantallas, pero permitiendo que los corpúsculos de Lesage viajen libremente entre ellas. Así, no sólo la Tierra no es una pantalla completa, sino que tampoco es un filtro, ya que los espacios no ocupados son mucho mayores que los ocupados. Para entender esto, debemos recordar que Laplace demostró que la atracción, al pasar a través de la Tierra, sufre una pérdida, a lo sumo, de diez millonésimas partes, y esta demostración es perfectamente satisfactoria.

En efecto, si la atracción fuese absorbida por los cuerpos por los que pasa, ya no sería proporcional a sus masas; sería *relativamente* más débil para los cuerpos grandes que para los pequeños, ya que tendría que atravesar un espesor mayor. La atracción del Sol a la Tierra sería, por tanto, *relativamente* más débil que la del Sol a la Luna, y

resultaría una desigualdad muy apreciable en el movimiento lunar. Entonces debemos concluir, si adoptamos la teoría de Lesage, que la superficie total de las moléculas esféricas por las cuales está compuesta la Tierra es, a lo sumo, la diez millonésima parte de la superficie total de la Tierra.

Darwin probó que la teoría de Lesage puede conducir a la ley newtoniana sólo si asumimos que los corpúsculos están completamente desprovistos de elasticidad. La atracción ejercida por la Tierra sobre una masa 1 a una distancia 1 será entonces proporcional tanto a *S* (la superficie total de las moléculas esféricas por las cuales está compuesta), como a *v* (la velocidad de los corpúsculos), como a la raíz cuadrada de *p* (la densidad del medio formado por los corpúsculos). El calor producido será proporcional a *S*, a la densidad *p*, y al cubo de la velocidad *v*.

Pero debemos tener en cuenta la resistencia experimentada por un cuerpo moviéndose en tal medio. De hecho, no se puede mover sin avanzar hacia ciertas colisiones, y, por otra parte, retirándose ante aquellas que vienen en la dirección opuesta, de tal forma que la compensación realizada en un estado de reposo ya no existe. La resistencia calculada es proporcional a *S*, a *p*, y a *v*. Ahora sabemos que los cuerpos celestes se mueven como si no se encontraran con resistencia alguna, y la precisión de las observaciones nos permite asignar un límite a la resistencia.

Variando esta resistencia como *Spv*, mientras que la atracción como $S\sqrt{pv}$, vemos que la relación de la resistencia al cuadrado de la atracción está en razón [proporción] inversa del producto *Sv*.

De esta forma, tenemos un límite inferior para el producto *Sv*. Ya teníamos un límite superior para *S* (por la absorción de la atracción por los cuerpos que atraviesa). Tenemos, pues, un límite inferior para la velocidad *v*, que debe ser, por lo menos, igual a 24.10^{17} veces la velocidad de la luz. De esto podemos deducir *p* y la cantidad de calor producido.

Esto resultaría suficiente para elevar la temperatura 10^{26} grados por segundo. En cualquier momento dado, la Tierra recibiría 10^{20} tanto calor como emite el Sol al mismo tiempo, y no solamente estoy hablando del calor que alcanza a la Tierra desde el Sol, sino al calor radiado en todas direcciones. Es claro que la Tierra ya no soportaría estas condiciones.

Llegaremos a conclusiones no menos fantásticas si, en oposición a los puntos de vista de Darwin, dotamos a los corpúsculos de Lesage de una elasticidad imperfecta

pero no nula. Es cierto que la *vis viva* de los corpúsculos ya no será completamente convertida en calor, pero la atracción producida será igualmente menor, de tal manera que sólo será la porción de la *vis viva* convertida en calor la que contribuirá a la producción de la atracción, y obtendremos así el mismo resultado. Un uso juicioso del teorema de virial nos permitirá darnos cuenta de esto.

Podemos transformar la teoría de Lesage al suprimir los corpúsculos e imaginar al éter atravesado en todas direcciones por ondas luminosas provenientes de todos los puntos del espacio. Cuando un objeto material recibe una onda luminosa, ésta ejerce sobre él una acción mecánica debida a la presión de Maxwell-Bartholi, tal como si hubiese recibido el golpe de un proyectil material. Las ondas en cuestión podrían, por lo tanto, desempeñar el papel de los corpúsculos de Lesage. Esto lo admite, por ejemplo, el señor Tommasina.

Pero esto no resuelve todas las dificultades. La velocidad de transmisión no puede ser mayor que la de la luz, y esto nos lleva a un número inadmisible para la resistencia del medio. Además, si la luz es totalmente reflejada, el efecto es nulo, tal como en la hipótesis de los corpúsculos perfectamente elásticos. Para poder crear atracción, la luz debe ser parcialmente absorbida, pero entonces se produciría calor. Los cálculos no difieren, en lo esencial, de aquellos hechos con respecto a la teoría ordinaria de Lesage, y el resultado mantiene el mismo carácter fantástico.

Por otra parte, la atracción no es absorbida, o lo es muy ligeramente, por los cuerpos que atraviesa, y esto no es cierto para la luz que conocemos. La luz que produciría la atracción newtoniana requeriría ser muy distinta a la luz ordinaria, y ser, por ejemplo, de una longitud de onda muy corta. Esto no toma en cuanta el hecho de que, si nuestros ojos fuesen sensibles a esta luz, todo el cielo parecería ser mucho más brillante que el Sol, de tal forma que el Sol destacaría en negro, ya que de otro modo nos repelería en lugar de atraernos. Por todas estas razones, la luz que nos permitiría explicar la atracción requeriría ser mucho más afín a los rayos *X* de Röntgen que a la luz ordinaria.

Por otra parte, los rayos *X* no resultan suficientes para esta empresa. No obstante qué tan penetrantes puedan parecernos, no pueden pasar por toda la Tierra, y debemos, en concordancia, imaginar rayos *X'* mucho más penetrantes que los rayos *X* ordinarios. Entonces una porción de la energía de estos rayos *X'* debe ser destruida, porque de lo contrario no habría atracción. Si no queremos que esta energía se transforme en calor (lo que llevaría a una enorme producción de éste), entonces debemos admitir que ésta

irradia en todas direcciones en la forma de rayos secundarios, que podríamos convenir en llamar rayos *X''*, que deben ser mucho más penetrantes incluso que los rayos *X'*, so pena de que, a su vez, perturben los fenómenos de la atracción.

Tales son las complicaciones a las que llegamos cuando buscamos hacer sostenible la teoría de Lesage.

Todo lo dicho hasta ahora asume las leyes ordinarias de la mecánica. ¿Será más fuerte el caso si admitimos la nueva dinámica? Y antes que nada, ¿podemos preservar el principio de relatividad? Primero demos a la teoría de Lesage su forma original, e imaginemos al espacio surcado por corpúsculos materiales. Si estos corpúsculos fuesen perfectamente elásticos, las leyes de su colisión estarían en conformidad con este principio de relatividad, pero sabemos que, en tal caso, su efecto sería nulo. Por lo tanto, debemos suponer que estos corpúsculos no son elásticos; pero entonces es difícil concebir una ley de colisión compatible con el principio de relatividad. Además, aún obtendríamos una producción de calor considerable, y, a pesar de eso, una apreciable resistencia del medio.

Las dificultades no son menores si omitimos los corpúsculos y regresamos a la hipótesis de la presión de Maxwell-Bartholi, y esto fue lo que tentó al propio Lorentz en su *Mémoire* a la Academia de Ciencias de Ámsterdam del 25 de abril de 1900.

Consideremos un sistema de electrones inmerso en un éter atravesado, en todas direcciones, por ondas luminosas. Uno de estos electrones vibra cuando es golpeado por alguna de estas ondas luminosas, y su vibración será sincrónica con la de la luz, aunque pueda haber una diferencia de fase si el electrón absorbe una parte de la energía incidente. Si, en efecto, absorbe energía, significa que es la vibración del éter la que mantiene al electrón en vibración, y el electrón debe estar, en consecuencia, por detrás del éter. Puede compararse a un electrón en movimiento con una corriente de convección, y por tanto con cualquier campo magnético, y particularmente esto, debido a la propia perturbación luminosa, debe ejercer una acción mecánica sobre el electrón. Esta acción es muy leve, y más aún, cambia su signo en el transcurso del periodo. Sin embargo, la acción media no es nula si hay una diferencia de fase entre las vibraciones del electrón y las del éter. La acción media es, pues, proporcional a esta diferencia, y consecuentemente a la energía absorbida por el electrón.

No puedo entrar a considerar los detalles de estos cálculos, y simplemente diré que el resultado final es una atracción entre cualesquiera dos electrones variando en la

razón [proporción] inversa del cuadrado de la distancia, y proporcional a la energía absorbida por los dos electrones.

Como consecuencia de lo anterior, no puede haber atracción sin absorción de luz, y tampoco, por tanto, sin producción de calor. Esto fue lo que convenció a Lorentz de abandonar esta teoría, que no difiere, en lo fundamental, de la teoría de Lesage-Maxwell-Bartholi. Lorentz se habría alarmado incluso más si hubiese llevado los cálculos hasta el final, porque encontraría que la temperatura de la Tierra debe incrementar a razón de 10^{13} grados por segundo.

IV. CONCLUSIONES

He intentado exponer, en unas cuantas palabras, una idea tan completa como sea posible de estas nuevas doctrinas, y he querido explicar cómo es que se originaron, porque de otra forma el lector se hubiese inquietado por su osadía. Las nuevas teorías aún no han sido demostradas (se encuentran lejos de ello), y descansan solamente sobre un agregado de probabilidades lo suficientemente imponente como para desechar la idea de tratarlas con desprecio. Los experimentos hechos a partir de ahora nos enseñarán, sin duda, qué debemos pensar de ellas, y la raíz de la cuestión se encuentra en el experimento de Kaufmann, y como tal debe intentarse verificarlo.

Como conclusión, ¿se me permite expresar un deseo? Supongamos que, en unos cuantos años, estas teorías son sometidas a nuevas pruebas y resultan triunfantes. Entonces nuestra educación secundaria correrá un gran riesgo, porque algunos maestros desearán, sin duda, dar lugar a estas nuevas teorías. ¡Las novedades resultan tan atractivas que es difícil no aparentar ser lo suficientemente avanzado! Por lo menos desearán abrir perspectivas a los niños, quienes serán advertidos, antes de que se les enseñe mecánica clásica, que ésta ya tuvo sus días, y que, como mucho, fue buena para alguien tan chapado a la antigua como Laplace. Y es así como los niños nunca estarán familiarizados con la mecánica ordinaria.

¿Es bueno advertirles que la mecánica clásica es sólo aproximada? Sin duda, pero no hasta después, hasta que hayan sido empapados, hasta la médula, con las leyes clásicas, hasta que hayan sido acostumbrados a pensar en ellas y ya no estén en peligro de olvidarlas. Solamente así resulta seguro mostrar sus limitaciones.

Es con la mecánica ordinaria con la que vivirán los niños, y la única que tendrán que aplicar. Sin importar cuál sea el progreso de la industria automotriz, nuestros coches

nunca alcanzarán las velocidades suficientes para que las leyes de la mecánica clásica dejen de cumplirse. Lo otro es sólo un lujo, y no debemos pensar en éste hasta que no haya riesgo alguno de que resulte perjudicial a lo necesario.

PARTE IV

CIENCIA ASTRONÓMICA

CAPÍTULO I

LA VÍA LÁCTEA Y LA TEORÍA DE GASES

Las consideraciones que quiero desarrollar aquí han atraído, hasta ahora, muy poca atención por parte de los astrónomos. Sólo tengo por citar una ingeniosa idea debida a Lord Kelvin, que nos ha abierto todo un nuevo campo de investigación, a la que aún queda darle seguimiento. Tampoco tengo resultados originales que dar a conocer, y todo lo que puedo hacer es ofrecer una idea de los problemas que se presentan, pero que nadie, hasta hoy en día, se ha propuesto resolver.

Todo mundo sabe cómo es que un gran número de físicos modernos representan la constitución de los gases. Los gases están compuestos por una innumerable multitud de moléculas animadas a grandes velocidades, que se cruzan y recruzan unas con otras en todas direcciones. Probablemente, estas moléculas actúan a cierta distancia unas sobre otras, pero esta acción decrece muy rápido con la distancia, de tal forma que sus trayectorias permanecen, aparentemente, rectilíneas, y sólo dejan de serlo cuando dos moléculas pasan lo suficientemente cerca una de la otra, en cuyo caso su mutua atracción o repulsión hace que se desvíen hacia la derecha o hacia la izquierda. A veces a esto se le da el nombre de colisión, pero no debemos entender esta palabra en su sentido ordinario: no es necesario que las dos moléculas entren en contacto, sino únicamente que se acerquen demasiado una con otra, para que su mutua atracción sea perceptible. Las leyes de desviación que experimentan son las mismas a como si hubiesen tenido una colisión real.

Parecería, a primera vista, que las desordenadas colisiones de este innumerable polvo sólo pueden producir un caos inextricable ante el cual debe retirarse todo intento

de análisis. Pero la ley de los grandes números, aquella suprema ley de la casualidad, viene en nuestra ayuda. Ante un semi-desorden, nos vemos forzados a perder la esperanza, pero ante un desorden extremo, esta ley estadística reestablece una especie de orden promedio o medio en el cual la mente puede reencontrarse. Es el estudio de este orden medio lo que constituye la teoría cinética de los gases, y nos muestra que las velocidades de las moléculas están igualmente distribuidas en todas direcciones, y que la cantidad de estas velocidades varía para las distintas moléculas, pero que su propia variación está sujeta a una ley conocida como la ley de Maxwell. Esta ley nos enseña cuántas moléculas están animadas a tal o cual velocidad, y tan pronto como un gas se aparta de esta ley, las mutuas colisiones de las moléculas tienden prontamente a traerlo de vuelta, al modificar la cantidad y dirección de sus velocidades. Los físicos han intentado, y no sin cierto éxito, explicar de esta manera las propiedades experimentales de los gases (por ejemplo, la ley de Mariotte o la de Boyle).

Ahora consideremos la Vía Láctea. Aquí también vemos un innumerable polvo, sólo que los granos de éste ya no son átomos sino estrellas. Estos granos también se mueven a grandes velocidades y actúan a cierta distancia unos sobre otros, pero esta acción es tan tenue a grandes distancias que sus trayectorias son rectilíneas. No obstante, de vez en cuando, dos de ellos pueden acercarse lo suficiente como para desviarse de su curso, como cuando un cometa pasa demasiado cerca de Júpiter. En pocas palabras, a los ojos de un gigante, para quien nuestros soles fuesen lo que para nosotros son los átomos, la Vía Láctea solamente se vería como una burbuja de gas.

Tal fue la principal idea de Lord Kelvin. ¿Qué podemos sacar de esta comparación, y hasta qué punto es precisa? Esto es lo que vamos a investigar, pero antes de llegar a una conclusión definitiva, y sin querer perjudicar la cuestión, debemos anticipar que la teoría cinética de los gases debe ser, para el astrónomo, un modelo que no debe seguirse ciegamente, pero que puede serle de inspiración. Hasta ahora, la mecánica celeste se ha ocupado únicamente del Sistema Solar, o de algunos pocos sistemas de estrellas dobles, y se ha retirado ante las agregaciones presentadas por la Vía Láctea, o ante ciertos grupos de estrellas o nebulosas resolubles, y esto porque vio en todas ellas solamente caos. Pero la Vía Láctea no es más compleja que un gas, y los métodos estadísticos basados sobre el cálculo de probabilidades aplicables a uno son también aplicables a la otra. Sobre todo, es importante tener en cuenta tanto la semejanza como la diferencia entre ambos casos.

Lord Kelvin intentó determinar, por estos medios, las dimensiones de la Vía Láctea. Este propósito se reduce a contar las estrellas visibles en nuestros telescopios, pero no podemos estar seguros que, detrás de las estrellas que vemos, no haya otras que no veamos, de tal suerte que lo que medimos de esta manera no es el tamaño de la Vía Láctea, sino el alcance de nuestros instrumentos. La nueva teoría nos ofrecerá otros recursos. Conocemos, en efecto, los movimientos de las estrellas más cercanas a nosotros, y podemos formarnos una idea de la cantidad y dirección de sus velocidades. Si las ideas expuestas arriba son correctas, estas velocidades deben seguir la ley de Maxwell, y su valor medio nos enseñará, por así decirlo, lo que corresponde a la temperatura de nuestro ficticio gas. Pero esta temperatura, por sí misma, depende de las dimensiones de nuestra burbuja gaseosa. ¿Cómo es que, en realidad, se comportará una masa gaseosa, dejada en reposo en el espacio, si sus elementos son atraídos en concordancia con la ley de Newton? Asumirá una forma esférica y, como consecuencia de la gravitación, la densidad será mayor en el centro, y la presión también se incrementará de la superficie al centro a causa del peso de las partes exteriores atraídas hacia el centro. Por último, la temperatura se incrementará hacia el centro, estando, tanto la temperatura como la presión, conectadas por la llamada ley adiabática, como en el caso de las sucesivas capas de nuestra atmósfera. En la propia superficie, la presión será nula, y lo mismo será cierto de la temperatura absoluta, es decir, de la velocidad de las moléculas.

Pero aquí se presenta una cuestión. He hablado de la ley adiabática, pero ésta no es la misma para todos los gases, ya que depende de la proporción de sus dos calores específicos. Para el aire y gases similares, esta proporción es 1. 41; ¿pero es al aire a lo que debe compararse la Vía Láctea? Evidentemente no. Debe ser, más bien, considerada como un gas monoatómico, tal como el vapor de mercurio, el argón, o el helio, esto es, la proporción de los calores específicos debe ser tomada como igual a 1. 66. Y, en efecto, una de nuestras moléculas sería, por ejemplo, el Sistema Solar; pero los planetas son personajes poco importantes y sólo cuenta el Sol, de tal forma que nuestra molécula es claramente monoatómica. E incluso si consideramos una estrella doble, es probable que la acción de una estrella ajena que se acerca se vuelva lo suficientemente apreciable como para desviar el movimiento general del sistema mucho antes que fuese capaz de perturbar las órbitas relativas de los dos componentes. En pocas palabras, la estrella doble se comportará como un átomo indivisible.

Sea como fuere, la presión, y consecuentemente la temperatura en el centro de la esfera gaseosa son proporcionales al tamaño de la esfera, ya que la presión se incrementa por el peso de todos los estratos suprayacentes. Podemos suponer que nos encontramos cerca del centro de la Vía Láctea y que, al observar la velocidad media real de las estrellas, sabremos qué corresponde a la temperatura central de nuestra esfera gaseosa y seremos capaces de determinar su radio.

Podemos formarnos una idea del resultado al considerar lo siguiente. Hagamos, pues, una hipótesis simple. La Vía Láctea es esférica, y sus masas están distribuidas de manera homogénea; de esto se sigue que las estrellas describen elipses teniendo el mismo centro. Si suponemos que la velocidad se reduce a nada en la superficie, podemos calcular esta velocidad en el centro a partir de la ecuación de la *vis viva*. Encontramos así que esta velocidad es proporcional al radio de la esfera y a la raíz cuadrada de su densidad. Si la masa de esta esfera fuese la del Sol, y su radio el de la órbita terrestre, esta velocidad, como fácilmente puede verse, sería la de la Tierra sobre su órbita. Pero en el caso que hemos supuesto, la masa del Sol tendría que estar distribuida a lo largo de una esfera con un radio 1, 000, 000 de veces más grande, siendo este radio la distancia de las estrellas más cercanas. La densidad sería, de acuerdo con esto, 10^{18} menor. Ahora, las velocidades están sobre la misma escala, y por tanto el radio debe ser 10^{9} mayor, o 1, 000 veces la distancia de las estrellas más cercanas, lo que daría alrededor de mil millones de estrellas en la Vía Láctea.

Pero se me dirá que estas hipótesis son demasiado fantasiosas. En primer lugar, la Vía Láctea no es esférica (pronto regresaremos a este punto), y en segundo lugar, la teoría cinética de los gases no es compatible con la hipótesis de una esfera homogénea. Pero si hiciésemos un cálculo exacto en conformidad con esta teoría, aunque sin duda obtendríamos un resultado distinto, aún sería del mismo orden de magnitud. Ahora bien, en un problema tal, los datos son tan inciertos que el orden de magnitud es al único fin que podemos aspirar.

Y aquí es donde se sugiere una primera observación. El resultado de Lord Kelvin, que recién he obtenido de nuevo a partir de un cálculo aproximado, está en una marcada concordancia con las estimaciones que los observadores han hecho con sus telescopios, de tal forma que debemos concluir que estamos a punto de penetrar en la Vía Láctea. Pero esto nos permite resolver otra cuestión. Están las estrellas que vemos porque brillan, ¿pero no podría haber estrellas oscuras viajando en los espacios

interestelares, y cuya existencia pudo haber permanecido desconocida por mucho tiempo? Pero en ese caso, lo que nos da el método del Lord Kelvin sería el número total de estrellas, incluyendo las estrellas oscuras, y como su número es equiparable al ofrecido por el telescopio, o bien no hay materia oscura, o por lo menos no hay tanta como materia brillante.

Antes de seguir debemos considerar el problema bajo otro aspecto. ¿Es realmente la Vía Láctea, así constituida, la imagen de un gas propiamente dicho? Sabemos que Crookes introdujo la noción de un cuarto estado de la materia, en donde los gases, volviéndose demasiado enrarecidos, ya no son gases verdaderos, sino se vuelven lo que él llamó materia radiante. En vista de la levedad de su densidad, ¿es la Vía Láctea la imagen de una materia gaseosa o radiante? Lo que nos proporcionará una respuesta es la consideración de lo que se llama el *camino libre* de las moléculas.

La trayectoria de una molécula gaseosa puede ser considerada como compuesta por segmentos rectilíneos conectados por arcos muy pequeños correspondientes a las sucesivas colisiones. La longitud de cada uno de estos segmentos es lo que se llama el camino libre. Obviamente, esta longitud no es la misma para todos los segmentos ni para todas las moléculas, pero podemos tomar un promedio, y a esto se le llama el *camino libre medio*, y su longitud está en proporción inversa a la densidad del gas. La materia será radiante cuando el camino medio sea mayor que las dimensiones del recipiente en donde está puesta, de tal forma que es probable que una molécula atraviese todo el recipiente en donde está contenido el gas sin experimentar colisión alguna, y permanezca gaseosa cuando suceda lo contrario. Se sigue que el mismo fluido puede ser radiante en un recipiente pequeño y gaseoso en uno grande, y esta es quizá la razón por la cual, en el caso de los tubos de Crookes, se requiere de un vacío más perfecto para un tubo mayor.

¿Cuál es, pues, el caso de la Vía Láctea? Es una masa de gas de muy baja densidad pero de enormes dimensiones. ¿Es probable que una estrella la atraviese sin encontrarse con colisión alguna, esto es, sin pasar lo suficientemente cerca de otra estrella como para desviarse apreciablemente de su curso? ¿Qué queremos decir por *suficientemente cerca*? Esto es, necesariamente, un tanto arbitrario, pero asumamos que es la distancia del Sol a Neptuno, que representa una desviación del alrededor de diez grados. Suponiendo, ahora, que cada una de nuestras estrellas está rodeada por una posible esfera de este radio, ¿será capaz una línea recta de pasar entre estas esferas? A la distancia media de las estrellas de la Vía Láctea, el radio de estas esferas subtiende un

ángulo de alrededor de una décima de segundo, y tenemos mil millones de estrellas. Si ponemos sobre la esfera celeste mil millones de pequeños círculos con radios de una décima de segundo, ¿cubrirán estos círculos muchas veces a la esfera celeste? Lejos de ello. Solamente cubrirán una parte de dieciséis mil. Así, la Vía Láctea no es la imagen de la materia gaseosa, sino de la materia radiante de Crookes. Sin embargo, como hubo muy poca precisión en nuestras conclusiones previas, no requerimos modificarlas en ningún grado apreciable.

Pero existe otra dificultad. La Vía Láctea no es esférica, y hasta ahora hemos razonado como si lo fuese, ya que es la forma de equilibrio que asumiría un gas aislado en el espacio. Por otra parte, existen ciertos grupos de estrellas cuya forma es globular, y a los que aplicaría mejor lo que hemos dicho antes. Herschel ya había explicado este aspecto notable, y asumió que las estrellas de estos grupos están uniformemente distribuidas de tal forma que un grupo es una esfera homogénea. Cada estrella describiría una elipse, y todas estas órbitas se cumplirían en el mismo tiempo, de tal suerte que, al final de un cierto periodo, el grupo regresaría a su configuración original, y tal configuración sería estable. Desafortunadamente, los grupos no parecen homogéneos. Observamos una condensación en el centro, y aún la observaríamos incluso si la estrella fuese homogénea, ya que es más espesa en el centro, pero esto no sería tan marcado. Por tanto, sería mejor comparar un grupo de estrellas con un gas en equilibrio adiabático que asume una forma esférica, porque tal es la figura de equilibrio de una masa gaseosa.

Pero se dirá que estos grupos de estrellas son mucho más pequeños que la Vía Láctea, de la cual es incluso probable que formen parte, y aunque son más densos, nos ofrecen más bien algo análogo a la materia radiante. Ahora bien, los gases únicamente alcanzan su equilibrio adiabático como consecuencia de innumerables colisiones moleculares. Quizá podríamos encontrar un método para reconciliar estos hechos. Supongamos que las estrellas del grupo tienen la suficiente energía como para que su velocidad se vuelva nula cuando lleguen a la superficie. Entonces podrían atravesar al grupo sin colisión alguna, pero al llegar a la superficie se vuelven y lo atraviesan de nuevo. Después de haberlo atravesado un gran número de veces, terminan siendo desviadas por una colisión. Aún bajo estas condiciones, tendríamos una materia que podría considerarse como gaseosa. Si por casualidad hubiese estrellas en el grupo con mayores velocidades, ya habrían surgido de él desde hace tiempo y lo hubiesen dejado para nunca regresar. Por todas estas razones, sería interesante examinar los grupos

conocidos e intentar obtener una idea de la ley de sus densidades, y ver si es la ley adiabática de los gases.

Regresemos a las consideraciones sobre la Vía Láctea. No es, pues, esférica, y estaría más propiamente representada por un disco aplanado. Es claro, entonces, que una masa comenzando sin velocidad desde la superficie llegará al centro con velocidades variantes, dependiendo si comenzó, desde la superficie, en la vecindad del medio del disco o desde el borde del mismo. En este último caso, la velocidad será considerablemente mayor.

Ahora bien, hasta ahora hemos asumido que las velocidades individuales de las estrellas, las velocidades que observamos, deben ser comparables a aquellas alcanzadas por tales masas. Esto supone una cierta dificultad. Antes he ofrecido un valor para las dimensiones de la Vía Láctea, y lo deduje de las velocidades individuales observadas, que son del mismo orden de magnitud que las de la Tierra sobre su órbita; pero, ¿cuál es la dimensión que así he medido? ¿Es el espesor o el radio del disco? Es, sin duda, algo entre ambos, pero en ese caso, ¿qué puede decirse del espesor por sí mismo, o del radio del disco? Faltan los datos para hacer el cálculo, y me contento con vislumbrar la posibilidad de basar, por lo menos, un estimado aproximado sobre un profundo estudio de los movimientos individuales.

Ahora nos encontramos confrontados por dos hipótesis. O bien las estrellas de la Vía Láctea están animadas a velocidades que son, en general, paralelas al plano galáctico, pero por lo demás distribuidas uniformemente en todas las direcciones paralelas a este plano. Si es así, la observación de los movimientos individuales revelaría una preponderancia de componentes paralelos a la Vía Láctea. Esto queda por comprobarse, ya que no conozco estudio sistemático alguno que haya tomado esta postura. Por otra parte, tal equilibrio sólo podría ser provisional, porque, como consecuencia de las colisiones, las moléculas - esto es, las estrellas - adquirirán considerables velocidades en una dirección perpendicular a la Vía Láctea, y terminarán por emerger de su plano, de modo que el sistema tenderá hacia una forma esférica, la única figura de equilibrio de una masa gaseosa aislada.

O bien todo el sistema está animado por una rotación común, y esa es la razón por la cual está aplanado, como la Tierra, como Júpiter, y como todos los cuerpos rotantes. Sólo que, como el aplanamiento es considerable, la rotación debe ser rápida. Rápido, sin duda, pero debemos comprender el significado de esta palabra. La densidad de la Vía Láctea es 10^{25} veces menor que la del Sol; una velocidad de revolución

$\sqrt{10^{25}}$ veces menor que la del Sol sería, por tanto, equivalente, en su caso, al punto de vista del aplanamiento. Una velocidad 10^{12} veces menor que la de la Tierra, o la trigésima parte de un segundo de arco en un siglo, sería una revolución rápida, casi tan rápida como para que un equilibrio estable sea posible.

En esta hipótesis, los movimientos individuales observables nos parecerán uniformemente distribuidos, y ya no habrá preponderancia de los componentes paralelos al plano galáctico. No nos enseñarán nada con respecto a la rotación en sí misma, ya que formamos parte del sistema rotatorio. Si las nebulosas espirales son otras Vías Lácteas ajenas a nosotros, no están involucradas en esta rotación, y podríamos estudiar sus movimientos individuales. Es cierto que son muy remotas, porque si una nebulosa tiene las dimensiones de la Vía Láctea, y si su radio aparentes es, por ejemplo, 20´´, su distancia será 10, 000 veces el radio de la Vía Láctea.

Pero esto no importa, ya que no pedimos de ellas información sobre el movimiento rectilíneo de nuestro sistema, sino sobre su rotación. Las estrellas fijas, por su movimiento aparente, revelan la rotación diurna de la Tierra, aun cuando su distancia es inmensa. Desafortunadamente, la posible rotación de la Vía Láctea, rápida como es, relativamente hablando, es muy lenta desde el punto de vista absoluto, y, además, los aspectos sobre las nebulosas no pueden ser muy exactos. Se requerirían, por consiguiente, miles de años de observación para aprender algo.

Sea como fuere, en esta segunda hipótesis la figura de la Vía Láctea sería una figura de equilibrio final.

No discutiré el valor relativo de estas dos hipótesis con mayor extensión, porque hay una tercera que es quizá la más probable. Sabemos que, entre las irresolubles nebulosas, pueden distinguirse varias familias, a saber, las nebulosas irregulares como las de Orión, las nebulosas planetarias y anulares, y las nebulosas espirales. Ya han sido determinados los espectros de las primeras dos familias, y éstos prueban ser discontinuos. Por consiguiente, estas nebulosas no están compuestas por estrellas. Es más, su distribución en el cielo parece depender de la Vía Láctea, ya sea que muestren una tendencia a apartarse de ella, o por el contrario una a acercarse, y por tanto forman parte del sistema. Por el contrario, las nebulosas espirales son generalmente consideradas como independientes de la Vía Láctea, y se asume que están, como ella misma, compuestas por una multitud de estrellas; que son, en pocas palabras, otras Vías Lácteas muy remotas de la nuestra. El reciente trabajo de Stratonoff tiende a hacer que

veamos a la propia Vía Láctea como una nebulosa espiral, y esta es la tercera hipótesis de la que deseaba hablar.

¿Cómo es que debemos explicar las apariencias sumamente singulares presentes en las nebulosas espirales, que resultan demasiado regulares y constantes como para deberse a la casualidad? Para empezar, es suficiente con dirigir la mirada hacia una de estas figuras para ver que la masa se encuentra en rotación, e incluso podemos ver la dirección de ésta: todos los radios espirales están curvos en la misma dirección, y es evidente que es el *ala de avance* colgando atrás sobre el *pivote* lo que determina la dirección de la rotación. Pero eso no es todo. Es claro que estas nebulosas no pueden ser ligadas a un gas en reposo, ni tampoco a un gas en equilibrio relativo bajo el dominio de una rotación uniforme. Deben compararse, más bien, con un gas en permanente movimiento en donde reinen las corrientes internas.

Supongamos, por ejemplo, que la rotación del núcleo central es rápida (ya se sabe qué quiero decir con esta palabra), demasiado rápida para un equilibrio estable. Entonces, en el ecuador, la fuerza centrífuga prevalecerá sobre la atracción, y las estrellas tenderán a escapar del ecuador, a la vez que formarán corrientes divergentes. Pero a medida que se alejan, como su momento de rotación permanece constante y se incrementa el radio vector, disminuirá su velocidad angular, y es por esto que el ala de avance parece quedarse atrás.

Bajo este aspecto, no habría un movimiento permanente, ya que el núcleo central perdería materia de forma constante, que se iría para nunca regresar, y se agotaría gradualmente. Pero podemos modificar la hipótesis. A medida que se aleja, la estrella pierde su velocidad y finalmente se detiene. En ese momento, la atracción toma posesión de ella nuevamente y la lleva de vuelta al núcleo; por lo tanto, habrá corrientes centrípetas. Debemos asumir que éstas están en la primera fila y las corrientes centrífugas en la segunda, si tomamos como comparación una compañía de guerra que, en plena batalla, ejecuta un movimiento de giro. En efecto, la fuerza centrífuga debe estar compensada por la atracción ejercida por las capas centrales de la nube sobre las capas exteriores.

Más aún, al final de un cierto periodo, se establece un status permanente. A medida que la nube se vuelve curva, la atracción ejercida por el ala de avance sobre el pivote tiende a retrasar a éste, y la del pivote sobre el ala de avance tiende a acelerar el avance de tal ala, cuyo movimiento retrógrado ya no se incrementa más, de tal suerte

que, al final, todos los radios terminan por girar a una velocidad uniforme. No obstante, podríamos asumir que la rotación del núcleo es más rápida que la de los radios.

Queda una cuestión. ¿Por qué estas nubes centrípetas y centrífugas tienden a concentrarse en los radios en lugar de estar más o menos dispersas por todas partes, y por qué estos radios están distribuidos de forma regular? La razón para la concentración de las nubes es la atracción ejercida por las nubes ya existentes sobre las estrellas que emergen del núcleo en su vecindad. Tan pronto como se produce una desigualdad, tiende a acentuarse por esta causa.

¿Por qué están los radios distribuidos de forma regular? Esta es una cuestión más delicada. Supongamos que no hay rotación, y que todas las estrellas se encuentran en dos planos rectangulares de tal suerte que su distribución es simétrica en relación con ambos planos. Por razones simétricas, no habría razón alguna para que emergieran de los planos ni para que se alterase la simetría. Esta configuración daría, por tanto, equilibrio, pero *sería un equilibrio inestable*.

Si, por el contrario, hay rotación, tendremos una configuración de equilibrio análoga a cuatro radios curvos, iguales unos con otros, e intersecando en un ángulo de 90°, y si la rotación es lo suficientemente rápida, este equilibrio puede ser estable.

No estoy en posición de hablar de manera más precisa. Es suficiente para mí con presagiar la posibilidad de que quizá estas formas espirales puedan ser explicadas recurriendo únicamente a la ley de gravitación y a consideraciones estadísticas, recordando aquellas de la teoría de gases.

Lo que recién he dicho sobre las corrientes internas muestra que podría haber algún interés en un estudio sistemático del agregado de los movimientos individuales. Esto podría llevarse a cabo dentro de cien años, cuando salga a la luz la segunda edición de la tabla astrográfica y sea comparada con la primera, que está siendo preparada ahora.

Pero desearía, como conclusión, llamar la atención sobre la cuestión de la edad de la Vía Láctea y de las nebulosas. Podríamos formarnos una idea de esta edad si obtuviésemos confirmación alguna de lo que hemos imaginado es el caso. Este tipo de equilibrio estadístico, cuyo modelo lo proporcionan los gases, no puede ser establecido excepto como la consecuencia de un gran número de colisiones. Si éstas son raras, solamente puede producirse [tal equilibrio estadístico] después de mucho tiempo. Si en realidad la Vía Láctea (o por lo menos los grupos que la conforman) y las nebulosas han adquirido este equilibrio, es porque son muy antiguas, y deberíamos obtener un límite

inferior para su edad. Deberíamos obtener, de igual forma, un límite superior, porque este equilibrio no es definitivo y no puede durar por siempre. Nuestras nebulosas espirales serían comparables a gases animados con movimientos permanentes, pero los gases en movimiento son viscosos y sus velocidades terminan por gastarse. Lo que en este caso corresponde a la viscosidad (y que depende de las posibilidades de colisión de las moléculas) es extremadamente escaso, de tal manera que el status actual puede seguir siendo tal por mucho tiempo, pero no por siempre, y entonces nuestra Vía Láctea no puede ser eterna ni volverse infinitamente antigua.

Pero esto no es todo. Consideremos nuestra atmósfera. En la superficie, debe prevalecer una temperatura infinitamente baja, y la velocidad de las moléculas se encuentra en la vecindad de cero. Pero esto aplica sólo a la velocidad media. Como consecuencia de las colisiones, una de estas moléculas debe adquirir (aunque es raro, es cierto) una velocidad enorme, y entonces abandonará la atmósfera, y una vez que la haya dejado, nunca regresará. De acuerdo con esto, nuestra atmósfera está siendo extenuada de una manera extremadamente lenta. Por el mismo mecanismo, la Vía Láctea también perderá una estrella de vez en cuando, y esto, de igual forma, limita su duración.

Pues bien, es cierto que si calculamos la edad de la Vía Láctea por este método llegaremos a números enormes. Pero aquí se presenta una dificultad. Algunos físicos, basando sus cálculos sobre otras consideraciones, estiman que los soles sólo pueden tener una existencia efímera de alrededor de cincuenta millones de años, mientras que nuestro mínimo sería mucho mayor que eso. ¿Debemos creer que la evolución de la Vía Láctea comenzó mientras la materia aún era oscura? ¿Pero cómo es que todas las estrellas que la componen llegaron, al mismo tiempo, a un periodo adulto, un periodo que dura tan poco tiempo? ¿O alcanzaron tal periodo de manera sucesiva, y las estrellas que vemos son solamente una pequeña minoría comparada con aquellas extintas o con aquellas que algún día serán luminosas? ¿Pero cómo podemos reconciliar esto con lo que se ha dicho antes sobre la ausencia de materia oscura en cualquier proporción considerable? ¿Debemos abandonar una de estas dos hipótesis? Y, si es así, ¿cuál? Me contento con hacer notar la dificultad sin pretender resolverla, y así termino con un gran signo de interrogación. Todavía con todo, es interesante establecer problemas aun cuando su solución parezca muy remota.

CAPÍTULO II

LA GEODESIA FRANCESA

Todo mundo comprende el interés que puede haber en conocer la forma y las dimensiones de nuestro globo, pero algunas personas quizá se sorprenderían por la precisión que se busca en esta empresa. ¿Es esto un lujo innecesario? ¿Cuál es la utilidad de los esfuerzos que los geodestas dedican a tal labor?

Si se le preguntase esto a un miembro del Parlamento, me imagino que respondería: “Me inclino a pensar que la geodesia es una de las ciencias más útiles, porque es una de las que más dinero nos cuestan.” Intentaré ofrecer una respuesta un tanto más precisa.

Las grandes obras de arte, tanto las de la paz como las de la guerra, no pueden llevarse a cabo sin grandes estudios detrás, que ahorren muchos tanteos, cálculos erróneos, y gastos inútiles. Estos estudios no pueden hacerse sin un buen mapa. Pero, en realidad, un mapa no es más que una imagen fantasiosa, que carece de todo valor si intentamos construirla sin basarnos en un marco sólido. También podríamos intentar que un cuerpo humano estuviese de pie sin esqueleto alguno.

Ahora bien, este marco se obtiene a partir de mediciones geodésicas. Por lo tanto, sin geodesia no tendríamos un buen mapa, y sin éste no habría grandes obras públicas. Estas razones, sin duda, serían suficientes para justificar tanto gasto, pero son razones calculadas para convencer al hombre práctico, y no es sobre ellas que debemos insistir aquí; existen razones más altas y, sobre todo, más importantes.

Así, estableceremos la cuestión de manera distinta: ¿Puede la geodesia hacernos conocer mejor la naturaleza? ¿Nos hace comprender su unidad y armonía? Un hecho aislado, en realidad, tiene poco valor, y las conquistas de la ciencia valen en la medida en que dispongan nuevos hechos.

Consecuentemente, si sucede que descubrimos una pequeña joroba sobre el elipsoide terrestre, este descubrimiento, por sí mismo, no supondría mucho interés. Se volverá inapreciable, por el contrario, si, al buscar la causa de tal joroba, tenemos la esperanza de penetrar nuevos secretos.

De tal forma que, en el siglo dieciocho, cuando Maupertuis y La Condamine se enfrentaron a climas tan diversos, no fue sólo por la búsqueda de conocer la forma de

nuestro planeta, sino también era una cuestión relativa al sistema de todo el mundo. Si la Tierra estaba achatada, entonces Newton resultaría victorioso, y con él la doctrina de la gravitación y toda la mecánica celeste moderna. Y hoy en día, siglo y medio después de la victoria de los newtonianos, ¿debemos suponer que la geodesia ya no tiene más que enseñarnos? No sabemos qué hay al interior de nuestro globo, y aunque los ejes de las minas y las perforaciones nos han proporcionado cierto conocimiento del estrato a dos o tres kilómetros de profundidad (esto es, la milésima parte de la masa total), todavía cabe preguntarse qué hay por debajo de ello.

De todos los extraordinarios viajes imaginados por Julio Verne, quizá el viaje al centro de la Tierra fuese el que nos habría llevado a las regiones más inexploradas.

Pero aquellas rocas profundamente hundidas que no podemos alcanzar ejercen, a cierta distancia, la atracción que actúa sobre el péndulo y que deforma al esferoide terrestre. La geodesia podría, por tanto, pesarlas a cierta distancia (por así decirlo) y ofrecernos información sobre su disposición. Esto nos permitiría realmente observar aquellas misteriosas regiones que Julio Verne nos mostró sólo en la imaginación.

Este no es un sueño vacío. Al comparar todas las mediciones, el señor Faye ha llegado a un resultado lo suficientemente bien calculado como para causar sorpresa. En las profundidades de los océanos, existen rocas de gran densidad, mientras que, por el contrario, debajo de los continentes parece haber espacios vacíos.

Nuevas observaciones nos permitirían, quizá, modificar estas conclusiones en sus detalles, aunque nuestro venerado maestro nos haya mostrado, en cualquier caso, en qué dirección debemos investigar, qué es lo que el geodesta puede enseñarle al geólogo interesado en la constitución interna de la Tierra, y qué material puede proporcionársele al pensador que desea reflexionar sobre el pasado y el origen de este planeta.

Ahora bien, ¿por qué he titulado a este capítulo “La Geodesia Francesa”? Es porque, en distintos países, esta ciencia ha asumido, quizá más que ninguna otra, un carácter nacional; y no es difícil ver las razones de esto.

Sin duda debe haber rivalidades. Las rivalidades científicas son, por lo general, corteses, y en cualquier caso son necesarias, ya que siempre resultan fructíferas.

Pues bien, en estas empresas que demandan esfuerzos tan grandes y tantos colaboradores, el individuo es prácticamente borrado, a pesar, por supuesto, de sí mismo, y nadie tiene derecho a decir: este es mi trabajo. Así, la rivalidad no es entre los individuos, sino entre las naciones, y nos vemos llevados a preguntarnos qué parte ha

tenido Francia en este trabajo. Debo decir que tenemos derecho a estar orgullosos de lo que ha hecho.

A principios del siglo dieciocho, tuvieron lugar grandes discusiones entre los newtonianos, que creían que la Tierra estaba achatada tal como lo demanda la teoría de la gravitación, y Cassini, quien se vio engañado por mediciones inexactas, y creía que el globo estaba alargado. Una observación directa, por sí misma, pudo haber resuelto la cuestión, y fue la Academia de Ciencias de Francia la que emprendió esta tarea, una tarea gigantesca para ese periodo.

Mientras que Maupertuis y Clairaut se encontraban midiendo un grado de longitud dentro del Círculo Polar Ártico, Bouguer y La Condamine dirigieron su atención hacia las montañas de Los Andes, en regiones entonces sujetas a España, y que hoy forman parte de la República de Ecuador. Nuestros emisarios estaban expuestos a grandes fatigas, ya que los viajes de entonces no eran tan sencillos como los de hoy.

Es cierto que el país en donde Maupertuis condujo sus operaciones no era un desierto, e incluso se dice que gozó, entre los lapones, de aquellas comodidades desconocidas al verdadero navegador ártico. Todo esto tuvo lugar, más o menos, en las cercanías de lugares en donde, hoy en día, los cómodos buques de vapor transportan, cada verano, multitudes de turistas y de jóvenes inglesas. Pero en ese entonces no existía ninguna agencia de viaje digna, y Maupertuis realmente pensó haber hecho una expedición polar.

Quizá no estaba del todo equivocado. Hoy, los rusos y los suecos están realizando mediciones similares en Spitzbergen, en un país en donde hay paquetes de hielo. Pero sus recursos son mucho mayores, y la diferencia de fecha compensa completamente la diferencia de latitud.

El nombre de Maupertuis ha llegado a nosotros considerablemente mutilado por las garras del Dr. Akakia[28], ya que Maupertuis tuvo la desgracia de ofender a Voltaire, quien entonces era el rey de la mente. En un principio, fue extravagantemente alabado por Voltaire, pero la adulación de los reyes debe temerse tanto como su desaprobación, porque siempre está seguida por un terrible día de juicio final. El propio Voltaire aprendió algo de esto.

Voltaire alguna vez llamó a Maupertuis “mi amable maestro del pensamiento”, “Marqués del Círculo Ártico”, “querido aplanador del mundo y de Cassini”, e incluso,

[28] “Doctor Akakia” es un ensayo satírico escrito por Voltaire y dirigido, precisamente, contra Maupertuis. Nota del Traductor.

como muestra suprema de adulación, “Sir Isaac Maupertuis”, y escribió, “No hay nadie más que al Rey de Prusia que ponga al mismo nivel que a ti; su único defecto es que él no es geómetra.” Pero muy pronto la escena cambió, y Voltaire ya no habla de deificarlo, como los argonautas de la Antigüedad, o de hacer bajar al cónsul de los dioses del Olimpo para que contemple su trabajo, sino de encerrarlo en un manicomio. Ya no habla más de su mente sublime, sino de su orgullo despótico, ennegrecido por muy poca ciencia y mucho absurdo.

No deseo relatar los conflictos de esta historia *heroicoburlesca*, aunque me gustaría hacer unas pocas reflexiones sobre dos líneas de Voltaire. En su *Discours sur la modération* (no hay duda de la moderación en la alabanza o en la censura), el poeta escribió:

Vous avez confirmé dans des lieux pleins d’ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.
(Usted ha confirmado en lugares llenos de aburrimiento,
Eso que Newton supo sin salir de casa.)

Estas dos líneas, que toman el lugar de las hiperbólicas alabanzas de antaño, son sumamente injustas, y sin duda Voltaire estaba lo suficientemente bien informado como para no saberlo.

En ese tiempo los hombres valoraban sólo los descubrimientos que pudiesen hacerse sin abandonar el hogar. Hoy es más bien la teoría por la que se tiene baja estima. Pero todo esto supone un concepto erróneo del objetivo de la ciencia.

¿Está la naturaleza gobernada por el capricho, o es la armonía la influencia reinante? Esa es la cuestión, y es en el momento en que la ciencia revela esta armonía cuando se vuelve bella, y por esa razón digna de ser cultivada. ¿Pero de dónde puede venir esta revelación si no es de la concordancia entre una teoría y la experiencia? Nuestro objetivo es, pues, averiguar si existe o no esta concordancia, y a partir de ese momento estos dos términos, que deben compararse uno con otro, se vuelven uno tan indispensable como el otro. Desdeñar uno en beneficio del otro sería una locura. Aisladas, la teoría es vacía y la experiencia es ciega, y ambas carecen de utilidad e interés por sí solas.

Maupertuis tiene, por tanto, derecho a su parte de fama. Ciertamente no es igual a la de Newton, quien recibió una chispa divina, o incluso a la de su colaborador

Clairaut, pero esto no quita que su trabajo fue necesario, y si Francia, después de haberse visto superada por Inglaterra en el siglo diecisiete, tomó tanta venganza en el siguiente siglo, no lo debe únicamente al genio de los Clairauts, los d' Alemberts, y los Laplaces, sino también a la gran paciencia de hombres como Maupertuis y La Condamine.

Llegamos ahora a lo que podría llamarse el segundo periodo heroico de la geodesia. Francia fue despedazada por las luchas internas, y toda Europa estaba en armas contra ella. Uno supondría que todas estas tremendas luchas hubiesen absorbido todas sus energías. Lejos de ello, no obstante, aún tuvo energías que prestar a la ciencia. Los hombres de esa época no se contrajeron antes de empresa alguna: eran hombres de fe.

Delambre y Méchain fueron comisionados para medir un arco que va desde Dunkirk hasta Barcelona. Esta vez no hubo viaje a Laponia o a Perú, ya que los escuadrones enemigos hubieran cerrado los caminos. Pero si las expediciones son menos distantes, los tiempos son tan turbulentos que los obstáculos e incluso los peligros resultan igual de grandes.

En Francia, Delambre tuvo que pelear contra la mala voluntad de municipalidades maliciosas. Uno sabe que los campanarios, que pueden observarse desde muy lejos y con precisión, a menudo sirven de señales para los geodestas. Pero en el país en que se encontraba Delambre ya no quedaban campanarios. No recuerdo qué procónsul fue el que pasó por ahí y se jactó de haber derribado todos los campanarios que arrogantemente levantaban sus cabezas por encima de las humildes viviendas de la gente común.

Es así que se erigieron pirámides de tablones cubiertas con lino blanco para hacerlas más conspicuas. Esto se hizo para significar algo muy distinto. ¡Lino blanco! ¿Quién fue el temerario que se aventuró a instalar, en nuestras colinas recién liberadas, el odioso estandarte de la contrarrevolución? El lino blanco debe ser ribeteado con franjas azules y rojas.

Méchain, durante su trabajo en España, se enfrentó a dificultades igualmente serias: los campesinos españoles eran sumamente hostiles. No había falta de campanarios, ¿pero no era un sacrilegio tomar posesión de ellos con instrumentos misteriosos y quizá diabólicos? Los revolucionarios eran aliados de España, pero eran aliados que olían un poco el juego.

“Nos amenazan constantemente”, escribe Méchain, “con cortarnos las gargantas.” Afortunadamente, y gracias a las exhortaciones de los curas y a las cartas pastorales de los obispos, los furiosos españoles se contentaron con las amenazas.

Algunos años después, Méchain realizó una segunda expedición a España, y se propuso, en esta ocasión, extender el meridiano que va de Barcelona a las Islas Baleares. Esta fue la primera vez que se intentó cruzar un brazo grande de mar a partir de la triangulación, haciendo observaciones de señales erigidas sobre alguna montaña alta de alguna isla distante. No obstante que esta empresa fue bien concebida y bien planeada, fracasó. El científico francés se encontró con todo tipo de dificultades, de las que se queja amargamente en su correspondencia: “¡El infierno…”, escribe quizá de manera exagerada, “… y todos los flagelos que vomita sobre la Tierra - tormentas, guerra, pestilencia, y oscuras intrigas - se desatan en mi contra!”

El hecho es que encontró, entre sus colaboradores, más arrogancia obstinada que buena voluntad, y que un millar de incidentes retrasaron su trabajo. La plaga no era nada; el miedo a ella era mucho más formidable. Todas las islas desconfiaban de sus vecinas, y temían recibir sus azotes. Fue sólo después de muchas semanas que Méchain obtuvo el permiso para desembarcar, con la condición de tener todos sus papeles en vinagre (tales eran los antisépticos de entonces). Descorazonado y enfermo, justo cuando aplicó para su retiro, murió.

Fueron Arago y Biot los que tuvieron el honor de retomar el trabajo inconcluso y de llevarlo a una conclusión feliz. Gracias al apoyo del gobierno español y a la protección de varios obispos, y especialmente de un célebre jefe bandido, las operaciones progresaron lo suficientemente rápido. Una vez felizmente terminadas, Biot regresó a Francia cuando la tormenta explotó.

Fue justo el momento en que toda España se levantaba en armas para defender su independencia contra Francia. ¿Qué hacía este extraño escalando montañas y haciendo señales? Evidentemente estaba llamando al ejército francés. Arago sólo logró escapar del populacho al ofrecerse como prisionero. En prisión, su única distracción era leer el recuento de su propia ejecución en los periódicos españoles. En ese entonces, los periódicos a menudo daban noticias prematuras. Por lo menos tuvo el consuelo de saber que había tenido una muerte valiente y cristiana.

La prisión, por sí misma, no era segura, y pudo escapar y llegar a Argel. Desde allí navegó a Marsella en un barco argelino, que fue capturado por un corsario español,

y Arago fue traído de vuelta a España, arrastrado de prisión en prisión en medio de alimañas y de la miseria más horrible.

Si sólo hubiese sido una cuestión de sus súbditos e invitados, el Dey[29] no habría dicho nada, pero había dos leones a bordo, regalos que el soberano de África enviaba a Napoleón. El Dey amenazó con la guerra.

El buque y los prisioneros fueron dejados en libertad. El punto [geográfico] en donde se les liberase debió haber sido el correcto, ya que entre ellos había un astrónomo, pero éste se encontraba mareado y los navegantes argelinos, que deseaban ir a Marsella, hicieron escala en Bugía. De ahí, Arago viajó a Argel, atravesando Cabilia a pie y sorteando infinitud de peligros. Fue detenido por mucho tiempo en África y amenazado con trabajos forzados. Al final, se le permitió regresar a Francia. Sus observaciones, que había guardado durante todo este tiempo bajo su camisa, y todavía más extraordinario, sus instrumentos, habían sobrevivido a estas terribles aventuras.

Hasta este punto, Francia no sólo ocupó el primer lugar [en investigaciones geodésicas], sino que lideró el campo casi sola. En los años que siguieron no permaneció inactiva, y el mapa de artillería francés se ha convertido en un modelo a seguir. Con todo, los nuevos métodos de observación y de cálculo vinieron principalmente de Alemania e Inglaterra. Fue, pues, sólo durante los últimos cuarenta años que Francia ha recuperado su posición. Y esto se lo debe a un oficial científico, el general Perrier, quien llevó a cabo, de manera exitosa, una empresa verdaderamente osada: la unión de África y España. Así pues, se establecieron estaciones sobre cuatro picos en dos costas del Mediterráneo, y se esperó por muchos meses a que hubiera una atmósfera clara y calmada. Al fin, se observó el delgado hilo de luz que había atravesado poco más de dos kilómetros sobre el mar, y la operación fue un éxito.

Hoy en día, se han concebido proyectos aún más atrevidos. Desde una montaña en las proximidades de Niza, se enviarán señales a Córcega, y ya no con fines geodésicos, sino para medir la velocidad de la luz. La distancia es sólo de doscientos kilómetros, y el rayo de luz debe hacer el viaje de vuelta después de haber sido reflejado por un espejo en Córcega. Y no debe desviarse por el camino, sino regresar al punto exacto desde donde comenzó.

En la actualidad, la actividad de la geodesia francesa no ha disminuido. Si bien es cierto que ya no tenemos tantas asombrosas aventuras que contar, el trabajo científico

[29] El “Dey” era un título otorgado a los gobernantes de Argelia en ese entonces. Nota del Traductor.

consumado es enorme. El territorio de Francia más allá de los mares, así como el de la madre patria, ha sido cubierto con triángulos sumamente precisos.

Cada vez nos hemos vuelto más exigentes, y lo que fue admirado por nuestros padres no nos satisface ya. Pero a medida que buscamos mayor exactitud, las dificultades aumentan considerablemente. Estamos rodeados de trampas, y debemos tener cuidado de un millar de causas de error insospechadas. Se vuelve, pues, necesario construir instrumentos cada vez más infalibles.

En este rubro, Francia tampoco se ha dejado superar. Su aparato para la medición de bases y de ángulos no deja nada que desear, y también cabe señalar al péndulo del coronel Defforges, que hace posible determinar la gravedad con una precisión desconocida hasta ahora.

El futuro de la geodesia francesa se encuentra en las manos del departamento geográfico de la armada, que ha sido dirigido, sucesivamente, por el general Bassot y por el general Berthaut. Esto tiene ciertas ventajas que difícilmente pueden sobreestimarse. Para un buen trabajo geodésico, la aptitud científica por sí sola no es suficiente, ya que un geodesta debe ser capaz de soportar grandes fatigas en todo tipo de climas. Así, el jefe debe saber cómo ordenar la obediencia de sus colaboradores y de imponerla sobre sus ayudantes nativos. Estas son cualidades militares, y más aún, es sabido que en el ejército francés la ciencia siempre ha ido de la mano con el coraje.

Añadiré que una organización militar asegura, también, la indispensable unidad de acción. Resultaría mucho más difícil reconciliar las pretensiones de los científicos rivales, celosos de su independencia y ansiosos de lo que llaman su honor, quienes no obstante tendrían que funcionar en concierto a pesar de las grandes distancias. Allí surgieron discusiones frecuentes entre los primeros geodestas, algunas de las cuales tuvieron eco hasta mucho después, y es sabido que en la Academia sonó por mucho tiempo la disputa entre Bouguer y La Condamine. Con esto no quiero decir que los soldados estén libres de pasiones, pero la disciplina impone silencio sobre una vanidad demasiado sensible.

Por otra parte, muchos gobiernos extranjeros han apelado a oficiales franceses para organizar sus departamentos geodésicos. Esto es una prueba de que la influencia científica de Francia más allá de sus fronteras no se ha debilitado. Sus ingenieros hidrográficos también suministran un célebre contingente al trabajo común, y los mapas de sus costas y colonias, y el estudio de las mareas, les ofrecen un vasto campo de

investigación. Finalmente, me gustaría mencionar la nivelación general de Francia, que está llevándose a cabo gracias a los ingeniosos y precisos métodos del señor Lallemand.

Con tales hombres, tenemos un futuro seguro, y no faltará trabajo por hacerse. El imperio colonial francés les ofrece tractos inmensos imperfectamente explorados, y eso no es todo. La Asociación Geodésica Internacional ha reconocido la necesidad de una nueva medición del arco de Quito, anteriormente determinada por La Condamine. Esta operación les ha sido confiada a los franceses, y ellos tienen todo derecho sobre ella, ya que fueron sus ancestros los que alcanzaron, por así decirlo, la conquista científica de las Cordilleras. Además, estos derechos no fueron impugnados, y el gobierno francés resolvió ejercerlos.

Los capitanes Maurain y Lacombe realizaron un estudio preliminar, y la rapidez con la que completaron su misión, viajando por países sumamente difíciles, y escalando los picos más precipitados, merece la alabanza más alta. Ambos despertaron la admiración del general Alfaro, presidente de la República de Ecuador, quien los apodó *los hombres de hierro*.

La misión definitiva comenzó inmediatamente bajo el mando del teniente coronel (después comandante) Bourgeois, y los resultados obtenidos justificaron las esperanzas puestas en esta empresa. Pero los oficiales se encontraron con dificultades inesperadas debidas al clima, y más de una vez tuvieron que permanecer, por varios meses, a una altitud de cuatro mil metros, entre nubes y nieve, sin poder ver nada de las señales a observar, que se negaban a mostrarse. Pero gracias a su perseverancia y coraje, las únicas consecuencias de lo anterior fueron un retraso y un incremento en los gastos, ya que la precisión de las mediciones no se vio afectada.

CONCLUSIONES GENERALES

Lo que me he propuesto explicar en las páginas anteriores es cómo el científico establece una discriminación entre los innumerables hechos ofrecidos a su curiosidad, ya que siempre se ve obligado a hacer una selección, aunque sólo sea por la debilidad natural de su mente y aquella sea un sacrificio. Para empezar, expliqué esto a partir de consideraciones generales, llamando la atención, por una parte, sobre la naturaleza del problema a ser resuelto, y por la otra, buscando una mejor comprensión de la naturaleza de la mente humana, el principal instrumento en la solución. Después expliqué por ejemplos, pero no una infinidad de ellos, ya que también tuve que hacer una selección, y naturalmente elegí las cuestiones que he estudiado con más cuidado. Sin duda otros hubiesen hecho una selección distinta, pero esto importa poco, porque creo que habrían llegado a las mismas conclusiones que las mías.

Existe, pues, una jerarquía entre los hechos. Algunos carecen de toda incidencia positiva y no nos enseñan nada excepto a sí mismos. El científico que los indaga no aprende nada sino hechos, y no aumenta su capacidad para predecir nuevos. Parecería que tales hechos ocurren una vez y no están destinados a repetirse.

Existen, por otra parte, hechos que dan un gran rendimiento, y cada uno de ellos nos enseña una nueva ley. Si la ciencia está obligada a hacer una selección, debe consagrarse a estos últimos.

Sin duda esta clasificación es relativa, y surge por la fragilidad de nuestra mente. Los hechos que ofrecen poco rendimiento suelen ser los más complejos, y sobre éstos ejercen una apreciable influencia una multiplicidad de circunstancias (circunstancias tan numerosas y diversas que no podemos distinguirlas todas). Pero yo diría, más bien, que estos son los hechos que consideramos complejos porque el enredo de estas circunstancias excede el alcance de nuestra mente. Indudablemente una mente más vasta y perspicaz que la nuestra juzgaría de otra forma. Pero esto, de nuevo, importa poco; no es esta mente superior la que tenemos que usar, sino la nuestra.

Los hechos que ofrecen gran rendimiento son aquellos que consideramos simples, ya sea que así lo sean en realidad, porque sólo están influidos por un pequeño número de circunstancias bien definidas, o ya sea porque adopten una apariencia de simplicidad, porque la multiplicidad de circunstancias de las que dependen obedecen las leyes de la casualidad, y así llegan a una compensación mutua. Esto último es lo más

frecuente, y nos obliga a indagar de una manera un tanto más cercana la naturaleza de la casualidad. Los hechos a los que aplican las leyes de la casualidad se vuelven accesibles al científico, quien perdería la esperanza en vista de la extraordinaria complejidad de los problemas a los que estas leyes no son aplicables.

Hemos visto cómo es que estas consideraciones aplican no únicamente a las ciencias físicas sino también a las matemáticas. El método de demostración no es el mismo para el físico que para el matemático, pero sus métodos de descubrimiento son muy parecidos. En ambos casos, consisten en ascender de los hechos a las leyes, y en buscar los hechos que sean capaces de conducir a una ley.

Para elucidar este punto, he mostrado cómo es que trabaja la mente de un matemático, y lo anterior bajo tres formas: la mente del matemático inventivo y creativo; la mente del geómetra inconsciente que, en los días de nuestros lejanos ancestros o en los brumosos años de nuestra infancia, construyó nuestra instintiva noción del espacio; y la mente del joven en una escuela secundaria para quien el maestro despliega los primeros principios de la ciencia, y busca hacerle entender sus definiciones fundamentales. En todo esto, hemos visto el papel desempeñado por la intuición y el espíritu de generalización, sin los cuales estos tres grados de matemáticos, si se me permite expresarme así, se reducirían a una impotencia igual.

Y en la demostración misma, la lógica no lo es todo. El verdadero razonamiento matemático es una inducción real, difiriendo, en muchos aspectos, de la inducción física, pero, como ella, procediendo de lo particular a lo universal. Todos los esfuerzos hechos por alterar este orden, y por reducir la inducción matemática a las reglas de la lógica, han terminado fracasando, aun cuando estén pobremente disfrazados del uso de un lenguaje inaccesible a los no iniciados.

Los ejemplos que he extraído de las ciencias físicas nos han mostrado una buena variedad de casos de hechos que ofrecen grandes rendimientos. Un único experimento de Kaufmann sobre los rayos de radio revoluciona, inmediatamente, la mecánica, la óptica, y la astronomía. ¿Por qué? Es porque, a medida que estas ciencias se desarrollaron, hemos reconocido, de manera más clara, los vínculos que las unen, y, finalmente, hemos percibido una especie de diseño general del mapa de la ciencia universal. Así, existen hechos comunes a varias ciencias, como una fuente principal de corrientes divergiendo en todas direcciones, que puede compararse al punto nodal del Paso de San Gotardo, desde donde fluyen aguas que alimentan cuatro cuencas distintas. Es entonces que podemos seleccionar nuestros hechos con más discernimiento que

nuestros predecesores, quienes consideraban a estas cuencas como distintas y separadas por barreras infranqueables. Siempre debemos seleccionar hechos simples, pero entre éstos debemos preferir aquellos situados en estos tipos de puntos nodales.

Y cuando las ciencias carecen de un vínculo directo, aún puede elucidárseles mutuamente por analogía. Cuando estaban siendo estudiadas las leyes que regulan los gases, se dio cuenta que el hecho a la mano era uno que produciría grandes rendimientos, y aún con todo este rendimiento fue estimado por debajo de su valor real, ya que los gases son, desde cierto punto de vista, la imagen de la Vía Láctea; y estos hechos, que parecían ser de interés únicamente para los físicos, abrirán pronto nuevos horizontes al astrónomo, quien en un principio esperaba poco de ellos.

Por último, sucede que cuando el geodesta descubre necesario voltear sus miras unos pocos segundos de arco con el fin de dirigirlas hacia una señal que ha erigido con gran dificultad, es un hecho muy pequeño, pero uno que ofrece grandes rendimientos, no sólo porque revela la existencia de una pequeña joroba sobre el geoide terrestre (esto sería, por sí mismo, de poco interés), sino porque esta joroba le da indicaciones sobre la distribución de la materia en el interior del globo, y, a través de esto, del pasado de nuestro planeta, su futuro, y las leyes de su desarrollo.